TIKIMYBINĖ KOMBINATORIKA

Atšaka: Tikimybių teorija ir matematinė statistika
(Magistrantūra, 2004, 2 semestras)

PROGRAMA

I. TIKIMYBINIS METODAS KOMBINATORIKOJE

1. Tikimybinė kombinatorika ar tikimybiniai metodai kombinatorikoje?
2. Viena poaibių spalvinimo problema
3. Ramsey skaičiai
4. Grafų vaizdavimo plokštumoje problema
5. Klikų problema

II. TIKIMYBINĖS KOMBINATORIKOS OBJEKTAI

1. Adityvieji natūraliojo skaičiaus skaidiniai
2. Aibės skaidiniai, Belo skaičiai
3. Polinomai virš baigtinio kūno, neredukuojamų polinomų kiekis
4. Binarieji medžiai, Katalano skaičiai
5. Vidutinis kelio ilgis greitojo rūšiavimo algoritme
6. Keilio teorema
7. Simetrinė grupė, keitinių ciklinė struktūra
8. Baigtinių aibių atvaizdžiai, funkciniai digrafai
9. Numeruotuosios kombinatorinės struktūros
10. Grafų generuojančių funkcijų fundamentalioji lema
11. Ansambliai, jų eksponentinės generuojančios funkcijos
12. Svorinės aibės, jų generuojančios funkcijos
13. Svorinės multiaibės, jų generuojančios funkcijos

III. TIKIMYBINIAI UŽDAVINIAI

1. Struktūros vektoriaus skirstinys ir sąlyginės tikimybės
2. "Kinų restorano" problema
3. Atsitiktinio keitinio ciklų struktūros vektorius
4. Ciklų kiekio asimptotinis skirstinys. Gončarovo teorema
5. Atsitiktinių keitinių generavimas
6. Felerio poravimas. Ciklų kiekio išraiškos Bernulio dydžiais
7. Atstumo pagal tikimybinių matų variaciją įvertis
8. Sąlyginių tikimybių įverčiai per besąlygines tikimybes
9. Didžiųjų skaičių dėsnis adityviosioms simetrinės grupės funkcijoms
10. Centrinė ribinė teorema
11. Svorinės multiaibės struktūros vektoriaus asimptotinis skirstinys
12. Komponenčių kiekio momentų konvergavimas
13. Svorinių aibių tikimybiniai uždaviniai

I. TIKIMYBINIS METODAS KOMBINATORIKOJE

1. Tikimybinė kombinatorika ar tikimybiniai metodai kombinatorikoje?

Kombinatorikoje naudojami visų matematikos šakų metodai ir rezultatai. Pastaruoju metu ypač plinta tikimybinis ,,virusas". Dažnai būna sunku įrodyti kažkokio išskirtinio objekto egzistavimą visoje jų klasėje. Tačiau toje klasėje įvedus tikimybinį matą, nesunku parodyti, kad išskirtinio objekto tikimybė yra teigiama. Iš čia daroma išvada, kad toks objektas egzistuoja. Žinoma, tai yra nekonstruktyvus įrodymas. Tačiau pamiršus patį įrodymo metodą, mes turime matematinį faktą, suformuluotą net nenaudojant žodžių ,,atsitiktinis", ,, su tam tikra tikimybe" ar panašių. Tokie rezultatai net nepriskiriami tikimybinei kombinatorikai, kurios išskirtinis bruožas yra pačių rezultatų formulavimas tikimybių teorijos terminais.

Šio kurso pradžioje paliesime keletą kombinatorikos uždavinių, kurių sprendimui patogu taikyti tikimybinius metodus. Tik po to, gerokai išnagrinėję pačius populiariausius kombinatorikos objektus, eisime prie jiems keliamų tikimybinių uždavinių. Vadinasi, kas yra tikimybinė kombinatorika, turėtų paaiškėti tik kurso gale.

2. Viena poaibių spalvinimo problema

Pradėkime nuo paprastos spalvinimo problemos. Imkime pradinę aibę X ir tarkime, kad turime galimybę jos elementus nuspalvinti naudodami vieną iš dviejų spalvų. Nagrinėkime jos d poaibių šeimą $\mathcal{A}$. Sakoma, kad $\mathcal{A}$ yra *dvispalvė*, jei yra toks X nuspalvinimas, kad kiekviename $\mathcal{A}$ poaibyje atsiras abiejų spalvų elementai. Jei $\mathcal{A}$ su $|\mathcal{A}| = m$ yra dvispalvė, tai ir daliniai pošeimiai su mažesniu skaičiumi poaibių bus dvispalviai. Didinant m ši savybė nebūtinai išlieka. Pavyzdžiui, aibės X su $|X| = 2d - 1$ visų d poaibių šeima $X^{(d)}$ jau nebėra dvispalvė. Iš tiesų, bet kaip spalvinant bus bent d vienodos spalvos elementų ir toks poaibis priklauso $X^{(d)}$. Kokia yra mažiausia poaibių šeimos $\mathcal{A} \subset X^{(d)}$, kai $d \geq 2$, galia, kad $\mathcal{A}$ nebūtų dvispalvė. Pažymėkime šią galią $m(d)$. Kitaip tariant, jei $|\mathcal{A}| < m(d)$, tai šeima $\mathcal{A}$ jau bus dvispalvė. Pritaikę Stirlingo formulę, iš pateiktojo pavyzdžio matome, kad

$$m(d) \leq \binom{2d-1}{d} = (1 + o(1)) \frac{2^{2d}}{2\sqrt{\pi d}}, \quad d \to \infty.$$

Tai yra gana grubokas įverti s iš viršaus. Daugiau informacijos suteikia apatiniai įverčiai. Ateityje tarsime, kad pradinė aibė X yra pakankamai didelė.

Teorema. *Teisingas toks įvertis iš apačios*:

$$m(d) > 2^{d-1}, \quad d \geq 2.$$

Įrodymas. Reikia įsitikinti, kad bet kokia d poaibių šeima $\mathcal{A}$ su $|\mathcal{A}| = m \leq 2^{d-1}$ yra dvispalvė. Nuspalvinkime aibės X elementus viena iš spalvų su vienoda tikimybe ir nepriklausomai vieną nuo kito. Galime sakyti, kad prieš spalvindami viršūnę metame monetą. Jei $A \in \mathcal{A}$ yra bet koks iš poaibių, tai tikimybė, kad visi jo elementai yra vienos spalvos, yra

$$P(S_A) := P(A - \text{vienspalvis}) = (1/2)^{d-1}.$$

Čia atsižvelgėme į dviejų spalvų galimybes. Tikimybė, kad bent vienas iš $\mathcal{A}$ poaibių bus vienspalvis, lygi

$$P\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} S_A\Big).$$

Jei poaibiai iš $\mathcal{A}$ nesikerta, ieškomas nuspalvinimas akivaizdžiai egzistuoja. Priešingu atveju užrašytoje įvykių sąjungoje įvykiai nėra nesutaikomi, o sankirtų tikimybės yra teigiamos. Tada

$$P\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} S_A\Big) < \sum_{A\in\mathcal{A}} P(S_A) = (1/2)^{d-1}m \le 1.$$

Iš čia išplaukia, kad priešingo įvykio, kad visi poaibiai bus dvispalviai, tikimybė yra teigiama, todėl egzistuoja X nuspalvinimas toks, kad $\mathcal{A}$ būtų dvispalvis. $\diamond$

Pastebėkime, kad $m(2) = 3$. Tai reiškia, kad 1 teoremoje gautas įvertis yra pasiekiamas. Pakanka panagrinėti trikampio viršūnių nuspalvinimo dviem spalvomis variantus. Visada bent viena kraštinė turės vienodos spalvos galus.

Sunkiau įrodyti teiginį, kad $m(3) = 7$. Panagrinėkite lygiakraščio trikampio viršūnių ir pusiaukraštinių visus tarpusavio susikirtimo taškus. Gausite 7 taškų aibę. Sudarykite šeimą 7 poaibių po tris iš taškų, esančių kraštinėse, pusiaukraštinėse ir kraštinių vidurio taškų. Kad ir kaip keistume visų taškų nuspalvinimo variantus, bent viena iš šeimos aibių bus vienaspalvė. Todėl $m(3) \le 7$.

Dvidešimtajame amžiuje taip ir nepavyko rasti $m(4)$ bei kitų šios funkcijos reikšmių.

3. Ramsey skaičiai

Ypač sunkios yra Ramsey'io skaičių problemos. Įsivaizduokime, kad juoda ir balta spalvom nuspalvinome pilnojo grafo K_n briaunas ir keliame klausimą, ar jame yra vienaspalviai pilnieji pografiai K_s arba K_t. Čia $s, t \le n$. Jei vieną iš šių pografių radome n eilės grafe, tai juo labiau rasime ir didesniame. Įdomus uždavinys yra surasti mažiausią n, kad bet kokiu būdu dviem spalvom nuspalvinatas K_n turėtų bent vieną minėtą vienaspalvį pografį. Šis mažiausias skaičius vadinamas *Ramsey skaičiumi* $R(s,t)$.

Su jais susijęs plačiai inomas faktas, jog šešių studentų draugijoje visada egzistuoja trejetas, kurie pažįsta vienas kitą arba nei vienas nepažįsta kito. Vaizduokime studentus šeštos eilės grafo viršūnėmis ir junkime briauna viršūnes, jei atitinkami studentai pažinojo vienas kitą. Šalia nubrėžkime *grafo papildinį*, t.y., grafą su šešiomis viršūnėmis, kurios sujungtos briaunomis, jei atitinkami studentai nepažinojo vienas kito. Uždėjus abu grafus vieną ant kito, gautume pilnąjį K_6 grafą. Taigi, minėtas faktas teigia, kad bet kaip perskyrus pilnojo grafo briaunas į dvi dalis (pvz., nudažius jas dviem skirtingomis spalvomis), arba viename, arba kitame pografyje bus pilnasis K_3 pografis. Deja, penkių studentų draugija tokios savybės jau nebeturi.

Performuluojant Ramsey skaičiaus $R(s,t)$ apibrėžimą, juo galima laikyti mažiausią eilę G grafo, kuriame arba jo papildinyje yra vienas iš vienspalvių pografių K_s arba K_t.

Ateityje laikysime, kad $s, t \ge 2$. Pastebėkime, kad

$$R(s,t) = R(t,s), \quad s,t \ge 2,$$

o

$$R(s,2) = R(2,s) = s, \quad s \geq 2.$$

Iš tiesų, dažant K_s grafo briaunas juodai ir baltai, arba visos briaunos bus juodos, arba bent viena balta.

1 teorema (Ramsey, 1928). *Tarkime, kad $R(s-1,t)$ ir $R(s,t-1)$ egzistuoja, o $s,t > 2$. Tada egzistuoja $R(s,t)$ ir yra teisinga nelygybė*

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1).$$

Be to, kai $s,t \geq 2$,

$$R(s,t) \leq \binom{r+s-2}{s-1}.$$

Įrodymas. Pirmąją nelygybę įrodinėjant, pagal sąlygą galime laikyti, kad dešinėje esantys dėmenys yra baigtiniai. Tegu

$$n := R(s-1,t) + R(s,t-1) =: n_1 + n_2.$$

Spalvinkime K_n grafo briaunas juodai ir baltai bet kokiu būdu. Reikia rasti juodai nudažytą pografį K_s arba baltą pografį K_t.

Fiksuokime K^n viršūnę x. Jos laipsnis $\delta(x) = n - 1 = n_1 + n_2 - 1$. Todėl ši viršūnė yra incidenti nemažiau negu n_1 juodų briaunų arba nemažiau negu n_2 baltų briaunų. Simetriškumo dėka galime teigti, kad yra teisingas pirmasis atvejis. Nagrinėkime pilnąjį K_{n_1} grafą, kurio viršūnės yra incidentiškos x ir kurias su x jungia juodos briaunos. Jei K_{n_1} turi baltą K_t pografį, tai pirmoji nelygybė įrodyta.

Priešingu atveju, pagal pažymėjimą $n_1 = R(s-1,t)$, pilnasis K_{n_1} grafas turi juodą K_{s-1} pilnąjį pografį, kuris kartu su x ir juodosiomis briaunomis, incidenčiomis x, sudaro pilnąjį pografį K_s. Pirmoji teoremos nelygybė įrodyta.

Antrąją nelygybę įrodome matematinės indukcijos metodu. Kaip esame pastebėję, kai $s = 2$ arba $t = 2$, antroji nelygybė virsta lygybe. Tarkime, kad $s,t > 2$, o $s',t' \geq 2$ kita pora natūraliųjų skaičių, $s' + r' < s + t$, kuriai antroji teoremos nelygybė jau yra teisinga pagal indukcinę prielaidą. Iš anksčiau įrodytos nelygybės išplaukia

$$\begin{aligned} R(s,t) &\leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \leq \\ &\leq \binom{t+s-3}{s-2} + \binom{t+s-3}{s-1} = \binom{t+s-2}{s-1}. \end{aligned}$$

Teorema įrodyta. ◇

Išvada. *Teisingas toks įvertis iš viršaus*:

$$R(s,s) \leq 2^{2s-3}.$$

Įrodymas. Kadangi binominių koeficientų

$$\binom{2s-3}{s-1}, \qquad \binom{2s-3}{s-2}$$

suma suskaičiuoja ne visus $(2s-3)$ aibės poaibius, tai

$$R(s,s) \le \binom{2s-2}{s-1} = \binom{2s-3}{s-1} + \binom{2s-3}{s-2} \le 2^{2s-3}. \tag{2.1}$$

Išvada įrodyta. $\diamond$

Pritaikę Stirlingo formulę, galėtume šį įvertį truputį patikslinti.

Jau anksčiau matėme, kad $R(2,2) = 2$, o. Įsitikinkite, kad minėta studentų būrelio savybė matematiškai yra išreiškiama lygybe $R(3,3) = 6$. Jai įrodyti pastebėtume, kad pirmoji iš (2.1) nelygybių parodo, jog $R(3,3) \le 6$. Apatinį įvertį gautume išnagrinėję pilnąjį K_5 grafą, pavaizdavę jį penkiakampiu ir nuspalvinę vidines briaunas baltai, o išorines – juodai. Kadangi jame nerastume vienspalvio trikampio, padarytume išvadą, kad $R(3,3) \ge 6$.

Ramsey'io skaičių įvertinimas iš apačios yra žymiai sudėtingesnė problema. Ją nagrinėsime naudodami tikimybinius samprotavimus.

2 teorema (P. Erdős). *Visiems $s \ge 2$ turime*

$$R(s,s) \ge 2^{s/2}.$$

Įrodymas. Galime pradėti nuo $s \ge 4$. Imkime K_n grafą, kai $n < 2^{s/2}$, ir nepriklausomai su vienodomis tikimybėmis $1/2$ nuspalvinkime jo briaunas juoda ir balta spalvomis. Bet kokio visų briaunų nuspalvinimo tikimybės yra lygios

$$2^{-\binom{n}{2}}.$$

Jei A yra viršūnių s aibė, o S_A – įvykis, kad visos A viršūnes jungiančios briaunos yra baltos, tai

$$P(S_A) = 2^{-\binom{s}{2}}.$$

Vadinasi, tikimybė, kad yra bent vienas baltas pilnasis pografis K_s, lygi

$$P\Big(\bigcup_{|A|=s} S_A\Big) \le \sum_{|A|=s} P(S_A) = \binom{n}{s} 2^{-\binom{s}{2}}.$$

Pasinaudokime nelygybe

$$\binom{n}{s} \le \frac{n^s}{2^{s-1}}, \quad s \ge 4,$$

išplaukiančia iš

$$\binom{n}{s} = \frac{n(n-1)\cdots(n-s+1)}{s!} \le \frac{n^s}{s!} \le \frac{n^s}{2^{s-1}}.$$

Taigi, jei $n < 2^{s/2}$,

$$P\Big(\bigcup_{|A|=s} S_A\Big) \le \frac{n^s}{2^{s-1}} 2^{-\binom{s}{2}} < 2^{s^2/2-\binom{s}{2}-s+1} = 2^{-s/2+1} \le 1/2.$$

Tokia pati tikimybė ir dėl juodojo K_s pografio egzistavimo. Vadinasi, tikimybė, kad neegzistuos nei baltas, nei juodas K_s, yra griežtai teigiama. Darome išvadą, kad yra grafo K_n nuspalvinimas su šia savybe. Teorema įrodyta. $\diamond$

Aptartus Ramsey skaičiaus $R(s,s)$ įverčius pavyksta patikslinti tik atskirais atvejais. Nežiūrint to, kad mes naudojome primityvius tikimybinus samprotavimus, bet kokiam s P.Erdős'o įverčio iki šiol nepavyko pagerinti.

4. Grafų vaizdavimo plokštumoje problema

Panagrinėkime grafų įdėties į plokštumą problemą. Prisiminkime, kad grafas vadinamas *planariuoju*, jei egzistuoja jam izomorfiškas plokščiasis grafas. Tai reiškia, kad planarųjį grafą galima pavaizduoti plokštumoje taip, kad briaunas vaizduojančios Žordano kreivės nesikirstų vidiniuose taškuose. Žinoma, gretimos briaunos bus vaizduojamos kreivėmis, turinčiomis bendrą galinį tašką. Paprastajam jungiam plokščiam grafui $G = (V, E)$ su $|V| = n$, $|E| = m$ ir veidų (valstybių) skaičiumi f galioja Eulerio lygybė

$$n - m + f = 2.$$

Iš čia išplaukia nelygybė

$$m \leq 3n - 6. \tag{4.1}$$

Iš tiesų, jei f_i – skaičius veidų, apribotų $i \geq 3$ briaunų, tai

$$f = f_3 + f_4 + \cdots, \qquad 2m = 3f_3 + 4f_4 + \cdots.$$

Vadinasi, $2m - 3f \geq 0$. Įstatę šį įvertį į Eulerio lygybę, gauname (4.1).

Taigi, matome, jog vaizduodami didelius grafus plokštumoje, neišvengsime briaunų susikirtimų. Aišku, galėtume išvengti briaunos susikirtimo su savimi, briaunų su bendra viršūne susikirtimo, dviejų briaunų susikirtimo dukart ir daugiau kartų. Kalbėdami apie briaunų susikirtimus čia išvardintų atvejų neturėsime omenyje. Koks yra minimalus briaunų susikirtimų skaičius paprastajam grafui? Pažymėkime jį $cr(G)$. Grafo įdėtį į plokštumą su tokiu susikirtimų skaičiumi vadinkime *minimaliuoju.*

1 teorema. *Teisingas įvertis iš apačios*

$$cr(G) \geq m - 3n + 6.$$

Įrodymas. Tarkime, kad grafą G įdėjome į plokštumą ir gavome $cr(G)$ briaunų susikirtimų. Susiskirtimo taškus prijungę prie viršūnių aibės, o jais apribotas briaunų dalis – prie briaunų, gauname naują grafą, kuris bus plokščias. Naujojo grafo eilė lygi $n' = n + cr(G)$, briaunų skaičius – $m' = m + 2cr(G)$, nes kiekviena naujoji viršūnė yra ketvirto laipsnio. Pagal (4.1) gauname

$$m + 2cr(G) \leq 3(n + cr(G)) - 6.$$

Iš čia išplaukia teoremos tvirtinimas. $\diamond$

Pastebėkite, kad $cr(K_6) = 3$. Jei m priklauso nuo n tiesiškai, tai 3 teoremos rezultatas yra gana tikslus. Bendru atveju jis grubokas. 1973 metais P. Erdős ir R.K. Guy iškėlė hipotezę, kad $cr(G) \geq cm^3/n^2$; čia $c > 0$. Ją 1982 metais įrodė visas būrys matematikų. Mes pateiksime tikimybinį kiek tikslesnio rezultato įrodymą.

2 teorema. *Jei paprastajam n eilės ir m didumo grafui $m \geq 4n$, tai*

$$cr(G) \geq \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}.$$

Įrodymas. Nagrinėkime minimalų grafo G įdėjimą į plokštumą. Tarkime, kad jame viršūnės atsiranda nepriklausomai su vienodomis tikimybėmis $0 < p < 1$. Gauname atsitiktinį grafą G_p. Jo eilė n_p, didumas m_p ir susikirtimų skaičius $X_p = cr(G_p)$ yra priklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tačiau 1 teoremos teiginys jam galioja. Gauname

$$X_p - m_p + 3n_p \geq 6 > 0.$$

Iš čia išplaukia sąryšis vidurkiams

$$\mathbf{E}X_p - \mathbf{E}m_p + 3\mathbf{E}n_p > 0. \tag{4.2}$$

Suskaičiuojame juos

$$\mathbf{E}n_= pn, \qquad \mathbf{E}m_p = mp^2, \qquad \mathbf{E}X_p = p^4 cr(G).$$

Sunkiau pastebima paskutinė lygybė argumentuojama tuo, kad naujajame grafe susikirtimas atsiranda senojo vietoje, jei pasirodo visos keturios briaunų galinės viršūnės. Dabar įstatę į (4.2), gauname

$$p^4 cr(G) - p^2 m + 3pn > 0.$$

Vadinasi,

$$cr(G) > \frac{p^2 m - 3pn}{p^4} = \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3}.$$

Parinkę $p = 4n/m$, iš čia gauname reikiamą įvertį. ◇

Sugalvokite dar gražesnį įrodymą!

5. Klikų problema

Dabar pateiksime pavyzdį, kuriame tikimybių vaidmuo yra kiek kitoks nei anksčiau pateiktuose teoremų įrodymuose. Priminsime, kad pilnasis pografis K_p grafe yra vadinamas *klika.* Intuityviai aišku, kad grafas, neturintis didelės eilės p klikos, negali turėti daug briaunų. Rasime šio fakto kiekybinį įvertinimą.

Turano teorema. *Jei grafas $G = (V, E)$ neturi p eilės klikos, tai*

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Įrodymas. Pasinaudokime ir tikimybėmis, ir viena optimizavimo idėja. Grafo viršūnių aibėje V įveskime tikimybinį skirstinį, viršūnei $u \in V$ priskirdami tikimybę $w_u \geq 0$ taip, kad
$$\sum_{u \in V} w_u = 1.$$
Skirstinį yra patogu žymėti vektoriumi $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Nagrinėkime sumą
$$f(\bar{w}) := \sum_{uv \in E} w_u w_v,$$
kurioje, kaip matome, imamos tik gretimų viršūnių tikimybių sandaugos.

Tegu u_1 ir v_1 – bet kokios negretimos viršūnės. Pažymėkime jų gretimųjų viršūnių tikimybių sumas
$$s = \sum_{u_1 v \in E} w_v, \qquad t = \sum_{u v_1 \in E} w_u.$$
Tegu $s \geq t$. Kaip keistųsi $f(\bar{w})$, jei v_1 tikimybę w_{v_1} „perduotume" u_1 viršūnei, tuo pačiu mažintume viršūnių su teigiamomis tikimybėmis skaičių? Tegu naujasis skirstinys bus $\bar{w}'$. Jis gautas iš $\bar{w}$ skirstinio v_1-ą koordinatę pakeitus 0 ir u_1-ą koordinatę – $w_{u_1} + w_{v_1}$. Kadangi
$$\begin{aligned} f(\bar{w}) &= \sum_{\substack{uv \in E \\ u \neq u_1, v \neq v_1}} w_u w_v + w_{u_1} \sum_{u_1 v \in E} w_v + w_{v_1} \sum_{u v_1 \in E} w_u \\ &= \sum_{\substack{uv \in E \\ u \neq u_1, v \neq v_1}} w_u w_v + w_{u_1} s + w_{v_1} t, \end{aligned} \tag{5.1}$$
Keičiant skirstinį nurodytu būdu, šioje sumoje išnyktų paskutinis, o priešpaskutinis dėmuo padidėtų dydžiu $w_{v_1} s$. Taigi, naujajam tikimybių skirstiniui
$$f(\bar{w}') = f(\bar{w}) + w_{v_1} s - w_{v_1} t \geq f(\bar{w}).$$
Vadinasi, galime padaryti išvadą: negretimų viršūnių tikimybes perduodant tai viršūnei, kurios kaimynių tikimybė yra didesnė, funkcijos f reikšmė nemažėja. Ji pasiekia maksimumą, kai viršūnės su teigiamomis tikimybėmis yra poromis gretimos. Tada jos sudaro kliką, kurios eilę pažymėkime $k \leq p - 1$.

Tegu dabar u_1 ir v_1 dvi šios klikos viršūnės su tikimybėmis $w_{u_1} > w_{v_1}$. Imkime $0 < \varepsilon < w_{u_1} - w_{v_1}$ ir pakeiskime šių viršūnių tikimybes per ε mažindami didesnę ir didindami mažesnę. Panašiai kaip (5.1), bet atsižvelgdami į tai, kad dabar ir $u_1 v_1 \in E$, gauname naująją funkcijos f reikšmę
$$\begin{aligned} f(\bar{w}'') = &\sum_{\substack{uv \in E \\ u \neq u_1, v \neq v_1}} w_u w_v + \big(w_{u_1} - \varepsilon\big) \sum_{u_1 v \in E} w_v + \big(w_{v_1} + \varepsilon\big) \sum_{u v_1 \in E} w_u \\ &+ \big(w_{u_1} - \varepsilon\big)\big(w_{v_1} + \varepsilon\big) = f(\bar{w}) - \varepsilon\big(1 - w_{u_1}\big) + \varepsilon\big(1 - w_{v_1}\big) - \varepsilon^2 \\ &= f(\bar{w}) + \varepsilon\big(w_{u_1} - w_{v_1}\big) - \varepsilon^2 > f(\bar{w}). \end{aligned}$$

Šis įvertis rodo, kad klikoms funkcija f pasiekia maksimumą, kai skirstinys viršūnių aibėje yra tolygus. Jei $v_1, \dots, v_k$ yra klikos viršūnės, tai jų tikimybės tada turi būti lygios $1/k$. Klika turi $k(k-1)/2$ briaunų, todėl maksimali funkcijos f reikšmė lygi

$$\frac{k(k-1)}{2}\frac{1}{k}\frac{1}{k}.$$

Didėjant $k \leq p-1$, ji didėja, tad bet kokiam tikimybiniam skirstiniui virūnių aibėje turime

$$f(\bar{w}) \leq \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big).$$

Paėmę tolygųjį skirstinį $w_u \sim 1/n$, $u \in V$, gauname

$$\frac{|E|}{n^2} \leq \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big).$$

Tą ir reikėjo įrodyti. $\diamond$

Ar Turano teorema nurodo tikslų grafo didumo įvertinimą? Atsakymas yra teigiamas. Pakanka panagrinėti $(p-1)$-dalius pilnuosius grafus. Pagal apibrėžimą jie gaunami suskaidžius viršūnių aibę į $(p-1)$-ą galios $n_i > 0$ poaibį taip, kad $1 \leq i \leq p-1$ ir $n_1 + \cdots n_{p-1} = n$, ir sujungiant kiekvieną porą viršūnių, gulinčių skirtinguose poaibiuose, briaunomis. Maksimalus briaunų skaičius bus tada, kada poaibiuose esančių viršūnių skaičius yra labiausiai artimas. Jei vienodo negalima pasiekti, tai imama sąlyga $|n_i - n_j| \leq 1$. Pastarieji grafai vadinami Turano vardu. Jei $(p-1)$ dalija n, tai turime $n_i \sim n/(p-1)$. Tokio $(p-1)$-dalio pilnojo grafo didumas lygus

$$\binom{p-1}{2}\Big(\frac{n}{p-1}\Big)^2 = \Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big)\frac{n^2}{2}.$$

Kadangi $(p-1)$-daliai grafai neturi p eilės klikos, tai matome, kad Turano gautas įvertis yra pasiekiamas.

II. KOMBINATORINIŲ STRUKTŪRŲ SUSKAIČIAVIMAS

1. Adityvieji natūraliojo skaičiaus skaidiniai

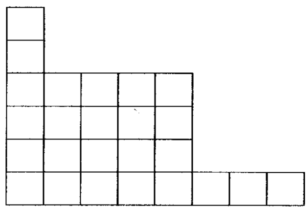
Pradėsime nuo paprastų uždavinių. Panagrinėkime klasikinį kombinatorikos ir skaičių teorijos uždavinį: *kiek kartų natūralųjį skaičių n galima užrašyti suma*

$$n = n_1 + \cdots + n_k \tag{1}$$

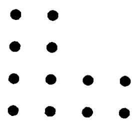
Čia k ir n_k - bet kokie natūralieji skaičiai. Dėmenų tvarką laikykime nesvarbia, todėl papildomai galime reikalauti, kad būtų $n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$. Ieškomasis skaičius vadinamas *Eulerio-Hardy-Ramanujano* vardu ir žymimas $p(n)$. Sugrupavę vienodus dėmenis, (1) lygybę galime užrašyti ir taip:

$$n = 1k_1 + \cdots + nk_n. \tag{2}$$

Dabar $k_j \geq 0$ nurodo, kiek dėmenų, lygių j buvo (1) skaidinyje. taigi, $p(n)$ - išreiškia ir vektorių $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^+$, tenkinančių (2) lygybę skaičių. Skaidinius (1) arba (2) galima vaizduoti lentelėmis:



20=8+5+5+1+1



12=4+4+2+2

vadinamomis *Jungo* arba *Ferero* diagramomis.

Eulerio teorema. *Tegu* $p(0) = 1$, *tada*

$$\sum_{n\geq 0} p(n)t^n = \prod_{j\geq 1}(1 - t^j)^{-1} =: f(t), \quad t \in \mathbf{C},\ |t| < 1.$$

Euleris šią tapatybę naudojo formaliai, be griežto pagrindimo. Taip mes dažnai elgsimės ateityje, bet šį kartą pateiksime visas įrodymo detales.

Įrodymas. Tarkime m - bet koks natūralusis skaičius. Kai $|t| < 1$, galime dauginti panariui baigtinį skaičių absoliučiai konverguojančių eilučių

$$f_m(t) := \prod_{j\leq m}(1 - t^j)^{-1} = (1 + t + t^2 + \cdots)\ldots(1 + t^m + t^{2m} + \cdots) =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_m\geq 0} t^{1k_1+\cdots+mk_m} = \sum_{n\geq 0} p_m(n)t^n,$$

čia $p_m(n)$ – lygties $1k_1+\cdots+mk_m = n$ sprendinių, priklausančių $\mathbf{Z}^{+m}$ skaičius, $p_m(0) = 1$. Aišku, $p_m(n) \le p(n)$ ir $p_m(n) = p(n)$, kai $1 \le n \le m$. Taigi,

$$f_m(t) = 1 + \sum_{n=1}^{m} p(n)t^n + \sum_{n \ge m+1} p_m(n)t^n.$$

Srityje $0 \le t < 1$ dalinės sandaugos $f_m(t)$ konverguoja į begalinę sandaugą $f(t)$. Be to, $f_m(t) \le f(t)$, todėl

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)t^n = f_m(t) \le f(t).$$

vadinasi, eilutės

$$\sum_{n\ge 0}^{\infty} p(n)t^n, \quad \sum_{n\ge 0}^{\infty} p_m(n)t^n$$

konverguoja, pastaroji – net tolygiai m atžvilgiu. Pastebėję, jog $p_m(n) \to p(n)$, kai $m \to \infty$ su visais $n \ge 0$, srityje $0 \le t < 1$ pereiname prie ribos ir gauname

$$\sum_{n\ge 0}^{\infty} p(n)t^n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n\ge 0}^{\infty} p_m(n)t^n = \lim_{m\to\infty} f_m(t) = f(t).$$

Pastebėję, kad nagrinėjamos eilutės ir sandaugos konverguoja absoliučiai srityje $|t| < 1$, galime teigti, kad lygybė galioja ir šiame realiosios tiesės intervale. Pagal analizinio pratesimo principą tapatybė galioja netgi kompleksinės plokštumos vienetiniame skritulyje. ◇

Pastebėkime, kad kiekviena natūraliojo laipsnio šaknis yra funkcijos $f(t)$ polius, todėl vienetinis apskritimas yra natūrali jos analizinio pratesiamumo riba. Naudojantis Koši formule galima toliau nagrinėti seką $p(n)$, bet tai – gana sudėtingi skaičiavimai. Dvidešimto amžiaus pradžioje Hardis ir Ramanudžanas, pvz., įrodė, kad

$$p(n) \sim \frac{\sqrt{3}}{4n} e^{2\pi\sqrt{n/6}}, \quad n \to \infty.$$

2. Aibės skaidiniai. Belo skaičiai

Tarkime A – n elementų aibė (n aibė). Nagrinėkime visas jos išraiškas nesikertančių ir netuščių jos poaibių sąjungomis

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k, \qquad A_k \subset A, \quad A_k \cap A_j = \emptyset, \quad 1 \le j < k \le s;$$

čia n – bet koks natūralusis skaičius. Tokių skaidinių kiekis vadinamas *Belo skaičiumi* ir žymimas B_n. Panagrinėkime jį.

1 teorema. *Susitarkime, kad $B_0 = 1$. Tada*

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}, \quad n \geq 1.$$

Įrodymas. Galime nagrinėti aibę $A = \{1, \ldots, n\}$. Bet koks A skaidinys poaibiais turi vieną poaibį Q su skaičiumi n. Tegu

$$Q = \{n\} \cup X \subset A, \quad n \notin X,$$

o X yra $(n-1)$ aibės $A \setminus \{n\}$ poaibis. Jei $|Q| = k$ – aibės Q elementų skaičius, tai kintant X galima sudaryti $\binom{n-1}{k-1}$ poaibių Q.

Pagal Belo skaičiaus apibrėžimą aibė $A \backslash Q$ gali būti išskaidoma sąjungomis B_{n-k} kartų. Kadangi visas A sąjungas galime gauti išrenkant aibes Q ir išskaidant likusį poaibį, tai

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$

$\diamond$

Kombinatorikoje dažnai naudojami *antros rūšies Stirlingo skaičiai*, $S(n,k)$, išreiškiantys n aibės skaidinių, turinčių sąjungose k poaibių, skaičių. Tad,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

Stirlingo skaičius $S(n,k)$ taip pat galima apibrėžti ir lygybe

$$t^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, t(t-1)\cdots(t-k+1).$$

Vėliau naudosime Belo skaičių eksponentinę generuojančią funkciją

$$B(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n t^n}{n!}.$$

2 teorema. $B(t) = \exp\{e^t - 1\}$.

Įrodymas. Iš 1 teoremos išplaukia

$$\begin{aligned} B'(t) &= \sum_{n\geq 1} \frac{B_n}{(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} \right) t^{n-1} = \\ &= \sum_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} t^{n-k} t^{k-1} = \sum_{j \geq 1} \frac{t^j}{j!} \sum_{k \geq 0} \frac{B_k t^k}{k!} = \\ &= e^t B(t). \end{aligned}$$

Išsprendę diferencialinę lygtį

$$\frac{B'}{B} = e^t$$

su pradine sąlyga $B(0) = 1$, baigiame teoremos įrodymą. $\diamond$

Išvada (Dobinskio formulė).

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}, \quad n \geq 1.$$

Įrodymas. Skaičiuojame $B(t)$ naudodami 2 teoremos rezultatą ir gauname

$$\begin{aligned} B(t) &= e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{e^{kt}}{k!} = e^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\sum_{n\geq 0}\frac{k^n}{n!}t^n = \\ &= e^{-1}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}\right)t^n. \end{aligned}$$

Sulyginę $B(t)$ koeficientus, gauname norimą formulę. $\diamond$

Kombinatorikoje sutinkami ir kitokie aibės skaidinių uždavinio variantai. Tarkime, reikia rasti n aibės skaidinių sąjungomis iš k poaibių, kurių pirmame yra n_1 elementų, antrame – n_2, o k-ame – n_k elementų, skaičių. Tokių skaidinių skaičius lygus polinominiam koeficientui

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}.$$

Čia be to, $n_1 + \cdots + n_k = n$.

3 teorema.

$$B_n = n! \sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbf{Z}^{+n} \\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(j!)^{k_j}\, k_j!}$$

Įrodymas. Vektorius $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ su $k_j \in \mathbf{Z}^+$ tokiai, kad $1k_1+\cdots+nk_n = n$, nusako skaidinio struktūrą: jame yra k_j galios j poaibių. Pasidarykime k_j dėžučių, kuriose gali tilpti j, $1 \leq j \leq n$, skaičių:

$$\overbrace{(\cdot)\ldots(\cdot)}^{k_1}\ldots\overbrace{\underbrace{(\cdot,\ldots,\cdot)}_{j}\ldots\underbrace{(\cdot,\ldots,\cdot)}_{j}}^{k_j}\ldots\overbrace{\underbrace{(\cdot,\ldots,\cdot)}_{n}\ldots\underbrace{(\cdot,\ldots,\cdot)}_{n}}^{k_n}.$$

Bet kaip išdėstydami visus n skaičių į jas, t.y. panaudodami visus $n!$ kėlinių, gauname nurodytos struktūros skaidinius. Atkreipkime dėmesį į pasikartojimus. Jų priežastys yra dvi:

(i) poaibių tvarka skaidinyje yra nesvarbi;

(ii) j galios poaibio elementų tvarka irgi nesvarbi.

Kitaip tariant, naudojant įvairius kėlinius, to pačio didumo dėžutės su įrašytais skaičiais galėjo keistis vietomis ir duoti tuos pačius skaidinius. Dėl (i) priežasties kievienas skaidinys buvo pakartotas

$$k_1! \dots k_j! \dots k_n!$$

kartų, o dėl (ii) priežasties –

$$(1!)^{k_1} \dots (j!)^{k_j} \dots (n!)^{k_n}$$

kartų. Padaliję $n!$ iš šių sandaugų, gauname reikiamą formulę. ◇

3. Polinomai virš baigtinio kūno

E.Galua įrodė, kad kiekvieno baigtinio kūno elementų skaičius yra pirminio skaičiaus laipsnis, kurį pažymėkime q, be to, kiekvienam q galima apibrėžti tokios eilės kūną, kurį žymėsime $\mathbf{F}_q$. Nagrinėsime polinomų virš jo žiedą $\mathbf{F}_q[x]$. Tegu $\mathbf{F}_q^*[x]$ – polinomų su vienetiniu vyriausiuoju koeficientu multiplikacinis pusgrupis. Pagal pagrindinę polinomų skaidumo teoremą kiekvienas $f \in \mathbf{F}_q^*[x]$ daugiklių tvarkos tikslumu yra išskaidomas pirminių (neskaidžių virš $\mathbf{F}_q$) polinomų sandauga

$$f = p_1 \dots p_s. \tag{1}$$

Čia $p_i \in \mathbf{F}_q^*[x]$. Tarkime, kad polinomo f laipsnis yra n ir (1) skaidinyje yra k_j pirminių polinomų, kurių laipsnis yra j, $1 \le j \le n$. Turime sąryšį

$$1k_1 + \cdots + nk_n = n. \tag{2}$$

Tegu $\pi(j)$ – j laipsnio pirminių polinomų su vienetiniu vyriausiuoju koeficientu skaičius. Rasime jo asimptotinį kitimo pobūdį, kai $j \to \infty$.

1 teorema. *Kiekvienam natūraliajam n teisinga lygybė*

$$q^n = \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbf{Z}^{+n} \\ 1k_1 + \cdots + nk_n = n}} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi(j) + k_j - 1}{k_j}.$$

Įrodymas. Pastebėkime, jog q^n lygus n laipsnio polinomų iš $\mathbf{F}_q^*[x]$ skaičiui. Visus tokius polinomus suskirstykime į klases. Tegu vieną klasę sudaro n laipsnio polinomai, kurių (1) skaidinyje yra k_j j-o laipsnio pirminių polinomų. Vektorius $\bar{k}$ vadinamas šios klasės polinomų *struktūros* vektoriumi. Jis tenkins (2) sąlygą ir vienareikšmiškai apibrėš nagrinėjamą klasę.

Kadangi kiekvieną polinomą galima suvokti kaip pirminių polinomų (1) sandaugą, suskaičiuokime, kiek tokių sandaugų galima sudaryti. Pirminius polinomus, kurių laipsnis yra j, galime imti su pakartojimais iš visos jų aibės, turinčios $\pi(j)$ elementų. Pagal kartotinių derinių apibrėžimą gauname

$$\binom{\pi(j)+k_j-1}{k_j} = (-1)^{k_j}\binom{-\pi(j)}{k_j} \tag{3}$$

galimybių. Skirtingų laipsnių polinomų rinkimas atliekamas nepriklausomai, todėl nagrinėjamos klasės polinomų skaičius lygus šių koeficientų sandaugai, o visų n laipsnio plolinomų skaičių gausime sudėję šias sandaugas pagal struktūros vektorius $\bar{k}$, tenkinančius (2) sąlygą. ◇

2 teorema. *Jei* $z \in \mathbf{C}, \quad |z| < q^{-1}$, *tai*

$$\sum_{n\geq 0} q^n z^n = (1-qz)^{-1} = \prod_{j\geq 1}(1-z^j)^{-\pi(j)}.$$

Įrodymas. Pasinaudokime apibendrintąja Niutono binomo ir (3) formulėmis. Gauname

$$(1-z^j)^{-\pi(j)} = \sum_{k\geq 0}\binom{\pi(j)+k-1}{k} z^{jk}.$$

Formaliai dauginkime šias eilutes pagal $j \geq 1$ ir gautuosius dėmenis grupuokime pagal vienodus z laipsnius. Gauname

$$\prod_{j\geq 1}(1-z^j)^{-\pi(j)} = \sum_{k_1,k_2,\dots\geq 0}\binom{\pi(1)+k_1-1}{k_1} z^{1k_1}\binom{\pi(2)+k_2-1}{k_2} z^{2k_2}\dots =$$
$$= \sum_{n\geq 0} z^n \Bigg(\sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbf{Z}^{+n}\\ 1k_1+\dots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n}\binom{\pi(j)+k_j-1}{k_j}\Bigg).$$

Pagal 1 lemą apskliaustasis koeficientas lygus q^n. Taigi formali lygybė yra įrodyta. Panašių formalių operacijų pagrindimą, esame aptarę skyrelyje apie natūraliojo skaičiaus skaidinius. ◇

Skaičių teorijoje yra apibrėžiama Miobiuso funkcija:

$$\mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{jei } m = 1;\\ 0, & \text{jei egzistuoja pirminio skaičiaus kvadratas, dalijantis } m;\\ (-1)^k, & \text{jei } m \text{ išsiskaido } k \text{ skirtingų pirminių skaičių sandauga.}\end{cases}$$

Viena iš jos savybių yra išreiškiama apgrežimo formulėje.

Lema (Miobiuso apgrežimo formulė). *Lygybės*

$$a_n = \sum_{m|n} b_n \quad ir \quad b_n = \sum_{m|n}\mu(m)a_{n/m}, \qquad a_n, b_m \in \mathbf{C},$$

yra ekvivalenčios. Čia sumuojama pagal visus natūraliuosius n daliklius.

Įrodymas. $\diamond$

3 teorema. *Su visais natūraliiaisiais skaičiais n teisinga formulė*

$$\pi(n) = \frac{1}{n}\sum_{m|n} \mu(m) q^{n/m} = q^n/n + O(nq^{n/2}).$$

Įrodymas. Logaritmuodami 2 teoremoje gautą generuojančios funkcijos ičraišką, gauname

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(qn)^n}{n} = \sum_{j\geq 1}\sum_{k\geq 1} \frac{t^{kj}}{k} = \sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{j|n} j\pi(j)\Big)\frac{t^n}{n}.$$

Vadinasi,

$$q^n = \sum_{j|n} j\pi(j).$$

Taigi, pirmasis teoremos teiginys išplaukia iš Miobiuso apgrežimo formulės. Įvertis gaunamas atskyrus dėmenį, kai $m = 1$, ir trivialiai įvertinus kitus dėmenis. $\diamond$

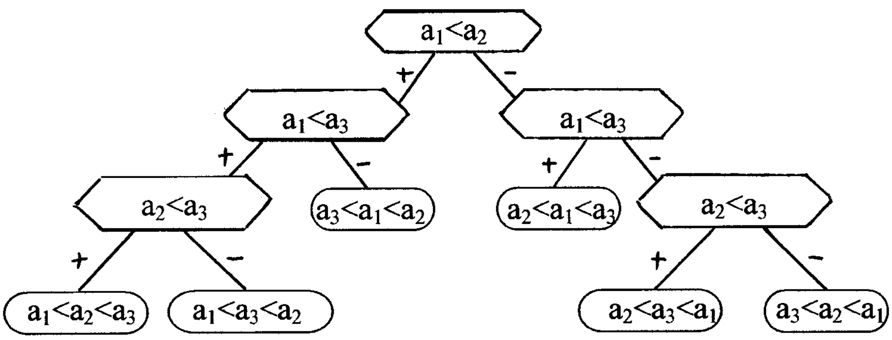
Užduotis. Įrodykite, kad pusgrupyje $\mathbf{F}_q^*[x]$ n-ojo laipsnio polinomų, neturinčių kartotinių pirminių daugiklių (*bekvadračių*) skaičius

$$\tilde{p}(n) = \sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbf{Z}^{+n}\\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi(j)}{k_j}.$$

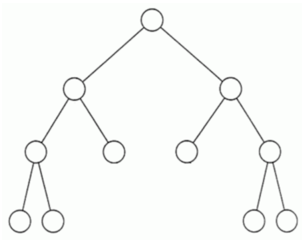
4. Rūšiavimo algoritmas ir binarieji medžiai

Informatika irgi ikelia kombinatorinių uždavinių. Ypač aktualios yra algoritmų teorijos problemos. Nagrinėkime bene populiariausią duomenų rūšiavimo uždavinį.

Tarkime, kad reikia sutvarkyti n skirtingų duomenų sąrašą $\{a_1, \ldots, a_n\}$ pagal kokį nors požymio (rakto) didėjimo eilę. Paprastumo dėlei laikykime, kad duomenys yra realieji skaičiai, todėl raktas yra jų didumas. Kai $n = 3$, algoritmas galėtų būti toks, kaip pavaizduota paveiksle.



Lakoniškai iliustruodami, gauname plokščiąjį grafą, vadinamą *binariuoju medžiu*:



Tokius medžius galime apibrėžti rekursyviai, t. y. naudojant pilnosios matematinės indukcijos principą.

Apibrėžimas. Medis T yra binarusis, jeigu
(i) jame yra viršūnė (vadinama *šaknimi*), sudaranti T, arba
(ii) ji yra sujungta su *kairiuoju* ir *dešiniuoju* binariaisias medžiais.

Aišku, (i) atveju turime tuščiąjį pirmos eilės medį, sudarytą iš vienos viršūnės, o (ii) atveju kairysis ir dešinysis medžiai yra mažesnių eilių negu T, todėl jų apibrėžimas galėjo būti laikomas indukcine prielaida. Žinoma, binarųjį medį galima nusakyti išvardijant jo būdingus bruožus. Kai jo eilė yra didesnė už vienetą, reikalaujama, kad jis turėtų savybes:
(iii) jame yra viena antrojo laipsnio viršūnė, laikoma *šaknimi*;
(iv) kitų viršūnių laipsniai yra lygūs 1 (jos vadinamos *lapais*) arba 3 (*vidinės viršūnės*);
(v) briaunų išvedimas kairėn ar dešinėn yra įskaitomas, t.y. jos laikomos skirtingomis.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad takas nuo šaknies iki lapo (medyje toks takas yra vienintelis) binariajame medyje, vaizduojančiame algoritmą, atitinka kažkokio sąrašo duomenų surūšiavimą. Rūšiuojant n duomenų, kad programa veiktų visais įmanomais atvejais, iš viso lapų turi būti ne mažiau negu $N := n!$ lapų. Kiekvieną binarų medį su šia savybe atitinka rūšiavimo algoritmas, todėl svarbu sužinoti binariųjų medžių, turinčių N lapų, skaičių C_N. Susitarkime, kad $C_1 = 1$. Skaičiai C_N vadinami *Katalano* vardu. Rasime jų savybių.

Teorema. *Katalano skaičiai C_N tenkina rekurentųjį sąryšį*

$$C_N = \sum_{k=1}^{N-1} C_k C_{N-k}, \quad C_1 = 1. \tag{1}$$

Be to,

$$C_N = \frac{1}{N}\binom{2N-2}{N-1} \sim \frac{2^{2(N-1)}}{N^2\sqrt{\pi}}, \tag{2}$$

kai $N \to \infty$.

Įrodymas. Tegu $N > 1$. Iš binaraus grafo atėmę jo šaknį, gauname du binariuosius medžius. Tarkime, kairiajame iš jų yra k lapų, o dešiniajame – $(N-k)$ lapų. Čia k gali būti bet kuris iš skaičių $1, \dots, N-1$. Pagal Katalano skaičiaus apibrėžimą galime nepriklausomai sudaryti C_k kairiųjų medžių ir C_{N-k-1} dešiniųjų. Sudėję pagal k, baigiame (1) lygybės įrodymą. Kitos lygybės įrodymui panaudojame generuojančią sekos C_N funkciją

$$F(t) := \sum_{N\geq 1} C_N t^N.$$

Kadangi

$$F(t)^2 = \sum_{N\geq 2} \Big(\sum_{k=1}^{N-1} C_k C_{N-k} \Big) t^N,$$

todėl

$$F(t) = t + F(t)^2$$

ir $F(0) = 0$. Vadinasi,

$$F(t) = \frac{1}{2}\Big(1 - (1-4t)^{1/2}\Big).$$

Naudodami apibendrintąją Niutono binomo formulę, randame koeficientą prie t^N. Jis lygus

$$C_N = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{N}(-4)^N = \frac{1}{2}\frac{(2N-3)!!\,4^N}{2^N N!} = \frac{(2N-2)!}{(N-1)!N!}.$$

Taigi, (2) lygybė įrodyta. Teoremoje pateikta asimptotika išplaukia iš Stirlingo formulės:

$$\sqrt{2\pi n}(n/e)^n \leq n! \leq e^{1/12n}\sqrt{2\pi n}(n/e)^n.$$

◇

5. Vidutinis kelio ilgis greitojo rūšiavimo algoritme

Algoritmo kokybė priklauso nuo vidutinio panaudotų duomenų palyginimų skaičiaus, laikant, jog duomenų sąraše dydžių tvarka yra vienodai galima. Kaip ištirti šį algoritmo parametrą, ypač kai duomenų skaičius didėja? Binariajame medyje jį atitinka vidutinis tako nuo šaknies iki lapo ilgis. Kaip ir anksčiau rūšiuokime n skirtingų duomenų sąrašą $\{a_1, \dots, a_n\}$ pagal rakto didėjimą. Tegu duomenų raktas yra jų didumas. Panagrinėkime vieną iš populiariausių rūšiavimo algoritmų, vadinamą *greituoju* arba *Hoare's* algoritmu:

(i) žingsnis: imame pirmąjį sąrašo elementą $a = a_1$ ir sudarome du dalinius duomenų sąrašus L^- ir L^+ tokius, kad L^- duomenys būtų mažesni už a, o L^+ duomenys būtų didesni;
(ii) surūšiuojame L^- ir L^+;
(iii) turėdami surūšiuotus L^- ir L^+ bei jų tarpe a, baigiame procedūrą.

Teorema. *Tarkime, kad q_n - n duomenų sąrašo elementų vidutinis palyginimų skaičius naudojant Hoarės algoritmą. Tada*

$$q_n = 2n\log n + O(n), \quad n \geq 2.$$

Įrodymas. Pastebėkime, kad pirmajame algoritmo žingsnyje visada atliekame $n-1$ duomenų palyginimų. Antrame žingsnyje atskirta aibė L^- su vienoda tikimybe gali turėti $k=1,\dots,n-1$ duomenų, o L^+ - $(n-1-k)$ duomenų. Jas sutvarkydami vidutiniškai naudojame q_k+q_{n-1-k} palyginimų. Vidurkinant pagal k ir prisiminę pirmąjį žingsnį, gauname

$$q_n = n-1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(q_k+q_{n-1+k}) = n-1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}q_k. \tag{2.1}$$

Aišku, kad $q_1=0$. Naudodami generuojančias funkcijas randame sekos q_n asimptotiką. Pažymėkime

$$Q(t)=\sum_{n=1}^{\infty}q_nt^n.$$

Padauginę panariui (2.1) iš nt^n ir sudėję pagal $n\geq 1$, gauname

$$\sum_{n\geq 1}nq_nt^n=\sum_{n\geq 1}n(n-1)t^n+2\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}q_k\right)t^n. \tag{2.2}$$

Matome, jog kairėje pusėje esanti eilutė lygi $tQ'(t)$. Ieškodami pirmosios eilutės dešinėje pusėje išraiškos, porą kartų panariui diferencijuojame begalinę geometrinę progresiją

$$\sum_{n\geq 0}t^n=(1-t)^{-1},\quad |t|<1.$$

Gauname, kad ieškoma eilutė lygi $2t^2/(1-t)^3$. Paskutinės eilutės (2.2) formulėje ieškome naudodami lygybę

$$\sum_{n\geq 1}t^n\sum_{n\geq 1}q_nt^n=\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}q_k\right)t^n.$$

Taigi, š (2.2) išplaukia

$$tQ'(t)=\frac{2t^2}{(1-t)^3}+\frac{2tQ(t)}{1-t} \tag{2.3}$$

Išsprendę šią pirmos eilės diferencialinę lygtį, kai patenkinama pradinė sąlyga $Q(0)=0$, gauname

$$\begin{aligned}Q(t)&=-2\frac{t+\log(1-t)}{(1-t)^2}=\\&=2(1+2t+3t^2+\cdots)(\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots).\end{aligned}$$

Iš čia gauname

$$q_n = 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}(n-k+1) = 2n\log n + O(n), \quad n \geq 2.$$

Teorema įrodyta. $\diamond$

Žinoma, kad bet kokiame rūšiavimo algoritme vidutiniškai reikia ne mažiau negu $\log_2 N! \approx 1,44...n\log n$ sąrašo elementų palyginimų.

6. Medžių skaičius. Cayley'io teorema.

Panagrinėkime kitokius negu binarieji medžiai grafus. Tarkime $G = (V, E)$ – grafas, kurio viršūnių aibė V yra netuščia, o briaunų aibė E yra sudaryta iš nesutvarkytųjų porų $e = xy$, čia $x, y \in V$, $x \neq y$. Grafai $G = (V, E)$ ir $G' = (V', E')$ vadinami *izomorfiškais*, jei egzistuoja bijekcija $\phi : V \to V'$ tokia, kad $xy \in E$ tada ir tik tada, kada $\phi(x)\phi(y) \in E'$. Skaičiuojant fiksuotos eilės $|V| = n$ grafų skaičių izomorfiškus grafus laikome lygiais. Įdomesnis yra grafų su sunumeruota viršūnių aibe, vadinamų **numeruotaisiais** grafais, atvejis. Dabar izomorfizmas turi išlaikyti ir numeraciją, t.y., jei x yra i-toji G grafo viršūnė, tai izomorfiškame G' grafe $\phi(x)$ turi būti irgi i-tąja viršūne. Pradėkime nuo paprasto teiginio.

1 teorema. *Iš viso yra*

$$2^{n(n-1)/2}$$

neizomorfiškų numeruotųjų n eilės grafų.

Įrodymas. Pastebėkime, kad uždavinys ekvivalentus pilnojo numeruoto grafo K^n pografių skaičiaus nustatymui. Bet kurios briaunos $e = x_i x_j$ galų numeriai nurodo, kurias viršūnes ji jungia, todėl skaičiuojamus pografius vienareikšmiškai apibrėžia galimi briaunų poaibiai. Pilnajame grafe yra $n(n-1)/2$ briaunų, todėl briaunų aibės poaibių skaičius lygus teoremoje nurodytam dydžiui. $\diamond$

Ketvirtame skyrelyje radome tam tikrų neizomorfiškų nemumeruotų plokščių medžių skaičių. Kaip elgtis numeruotų medžių atveju? 1889 metais Cayley apskaičiavo neizomorfiškų numeruotų n tos eilės medžių kiekį $T(n)$? Pradžioje įsitikiname, jog yra

$$\frac{4!}{2} + 4 = 16$$

skirtingų 4-os eilės medžių. Savarankiškai panagrinėkite didesnės eilės medžius.

Cayley'io teorema. *Iš viso galime sudaryti n^{n-2} neizomorfiškų numeruotų n eilės medžių.*

1 -sis įrodymas (Prüfer'io). Tarkime $\mathcal{G}$ - nagrinėjamų medžių aibė. Kadangi sekų aibės

$$\{(a_1, \ldots, a_{n-2}) : \ 1 \leq a_i \leq n, \, 1 \leq i \leq n-2\} =: \mathcal{A}$$

galia yra n^{n-2}, pakaks rasti bijektyvų atvaizdį $\mathcal{A} \to \mathcal{G}$.

Kai $n \leq 2$, teiginys akivaizdus.

Tegu toliau $n > 2$. Medžiui $G = (V, E)$, kurios viršūnių aibė sunumeruota, $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$, vienareikšmiškai priskirsime seką $\alpha = (a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \mathcal{A}$, vadinamą medžio **Prüfer'io kodu**. Pradėkime nuo medžio galinės viršūnės, kurios laipsnis lygus 1. Tokios viršūnės egzistuoja, nes kiekviena briauna turi dvi viršūnes ir todėl

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(x_i) = 2(n-1).$$

Iš kelių tokių viršūnių išrinkime tą, kurios indeksas yra mažiausias. Tegu tai viršūnė x_{b_1}, o a_1 - indeksas viršūnės, gretimos pirmajai. Grafas $G - x_{b_1}$ yra $n-1$ eilės medis, todėl procesą galima kartoti, kol viršūnių, likusių grafe, skaičius yra didesnis už 2. Kai šis skaičius lygus 2, mes jau esame sudarę vienintelę seką $(a_1, \ldots, a_{n-2})$.

Atvirkščiai, ar bet kokiai sekai $\alpha = (a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \mathcal{A}$ galima vienareikšmiškai priskirti medį? Atidėkime n viršūnių ir brėžkime norimą medį, vadovaudamiesi žemiau nurodytomis taisyklėmis:

a) jei b_1 - mažiausias iš bent dviejų natūraliųjų skaičių (iš $1, ..., n$), nepasirodžiusių sekoje α, tada junkime x_{b_1} su x_{a_1};

b) aibę $\{1, \ldots, n\}$ pakeiskime $\{1, \ldots, n\} \setminus \{b_1\}$, o α - seka $(a_2, \ldots, a_{n-2})$;

c) procesą kartojame, kol išsemiame visą seką (tuo pačiu nubrėžiame $n-2$ grafo briaunas);

d) tarpusavyje sujungiame dvi likusias viršūnes.

Taip vienareikšmiškai gautasis grafas yra medis, nes jis jungia visas n viršūnių, o jo didumas yra $n-1$.

Kadangi abu nagrinėti atvaizdžiai yra vienas kito atžvilgiu yra atvirkštiniai, teorema įrodyta.

Grafų teorijai artimesnis kitas Cayley'io teoremos įrodymo būdas.

Antrasis teoremos įrodymas. Tarkime $T(n, k)$ - kiekis n tos eilės medžių, kuriuose fiksuota viršūnė $x \in V$ yra k-ojo laipsnio, $2 \leq k \leq n-1$. Viršūnės numeris nesvarbus, jo neminėsime. Išvesime sąryšį tarp $T(n, k)$ ir $T(n, k-1)$.

Imame medį G, kuriame $d(x) = k-1$. Jame išmeskime briauną uv, neincidenčią su x. Grafas skilo į du pomedžius, viename iš jų yra viršūnės x ir u arba x ir v. Tarkime, yra pirmasis atvejis. Sujungę dabar x su v, gauname vėl medį G', kuriame $d(x) = k$. Porą (G, G') pavadinkime *junginiu* ir suskaičiuokime jų kiekį dviem būdais. Kadangi grafui G mes galime sudaryti tiek G', kiek yra briaunų su aukščiau minėtomis savybėmis, tai vienam G mes turime $n-1-(k-1) = n-k$ partnerių. Taigi, iš viso yra $(n-k)T(n, k-1)$ junginių.

Skaičiuokime tą patį skaičių kitu būdu, pradėdami nuo G', kuriame $d(x) = k,\ k \geq 2$. Tarkime $x_1, \ldots, x_k$ - gretimos x viršūnės. Paeiliui išmesdami briaunas $xx_i,\ i = 1, \ldots k$, mes "atskeltume" pomedžius $T_1, \ldots, T_k$, kurių eilės tegu bus $n_1, \ldots, n_k$,

$$n_1 + \cdots + n_k = n - 1. \tag{1}$$

Grafo G' partnerį junginyje dabar konstruojame tokiu būdu:

a) išmetame xx_1, o vėliau viršūnę x_1 sujungiame su bet kokia iš viršūnių, nepriklausančių T_1 (turime $n-1-n_1$ galimybių);

b) tą patį kartojame su $T_2, \ldots, T_k$.

Atsižvelgę į grafų G' kiekį $T(n,k)$ ir (1) iš viso gauname junginių

$$\sum_{i=1}^{n} T(n,k)(n-1-n_i) = (n-1)(k-1)T(n,k).$$

Sulyginę abi junginių skaičiaus formules, gauname

$$(n-1)(k-1)T(n,k) = (n-k)T(n,k-1).$$

Kai $k = 1$, ši rekurenčioji formulė irgi teisinga. Jos nagrinėjimui galime panaudoti akivaizdų faktą, kad $T(n, n-1) = 1$ (**žvaigždinio** grafo atvejis). Gauname

$$T(n,k) = \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}.$$

Sudėdami šias lygybes, išvedame medžių kiekio $T(n)$ formulę

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n,k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1} = ((n-1)+1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

Teorema įrodyta. ◇

Numeruotą medį su viena išskirta viršūne, *šaknimi*, vadinsime *šakniniu* medžiu.

Išvada. *Yra $d_n := n^{n-1}$ šakninių n eilės medžių.*

Įrodymas. Kiekvieno medžio, kurių kiekį nusako Cayley'io teorema, šaknimi gali būti bet kuri viršūnė. ◇

Šakniniai numeruoti medžiai vadinami *Cayley'io* vardu. Baigtinis jų rinkinys vadinamas *šakniniu mišku.* Jį sudarančių medžių šaknų rinkinys laikomas *miško šaknimi.* Kai miško medžių tvarka yra įskaitoma, miškas vadinamas *plokščiuoju.* Jo šaknis bus sutvarkytasis medžių šaknų rinkinys.

2 teorema. *Jei q_n – n eilės šakninių miškų skaičius, tai*

$$q_n = (n+1)^{n-1}. \tag{2}$$

Įrodymas. Imkime $(n+1)$-os eilės Cayley'io medį ir atimkime jo šaknį, turėjusią numerį $j \in \{1, \ldots, n+1\}$. Medis skyla į n eilės mišką. Sunumeruokime jo viršūnes pirmaisiais n natūraliųjų skaičių. Tuo tikslu buvusius viršūnių indeksus, didesnius už j, sumažinkime vienetu. Nepriklausomai nuo buvusio j, gauname vieną numeruotą n eilės mišką. Taigi, iš $(n+1)$-o $(n+1)$-os eilės medžio gavome vieną mažesnės eilės mišką.

Atvirkščiai, turėdami n eilės šakninį mišką iš keleto Cayley'io medžių, įvedame papildomą viršūnę, ir ją briaunomis sujungiame su medžių šaknimis. Priskirdami paeiliui papildomajai viršūnei numerius $j = 1, \dots, n+1$ ir buvusių viršūnių indeksus, ne mažesnius negu j padidindami vienetu, gautume $(n+1)$-ą $(n+1)$-os eilės Cayley'io medį. Vadinasi, $q_n = d_{n+1}/(n+1)$. Dabar (2) išplaukia iš Cayley'io teoremos. ◇

7. Simetrinė grupė

Viena iš svarbiausių kombinatorinių struktūrų yra simetrinė grupė. Paminėsime porą jos savybių. Bijektyvus n aibės X atvaizdis σ į ją pačią vadinamas *keitiniu.* Paprastumo dėlei, tegu $X = \{1, \dots, n\}$, tada σ patogu žymėti lentele

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\sigma & 2\sigma & \dots & n\sigma \end{pmatrix},$$

kurioje $j\sigma$ yra elemento j vaizdas, $j = 1, \dots, n$. Tegu $\mathbf{S}_n$ visų keitinių aibė, o σ_1, σ_2 du jos atstovai. Lygybė

$$j(\sigma_1\sigma_2) = (j\sigma_1)\sigma_2, \quad 1 \le j \le n$$

apibrėžia algebrinę operaciją, vadinamą *keitinių daugyba.* Algebroje įrodoma, kad $\mathbf{S}_n$ šios operacijos atžvilgiu yra grupė, vadinama *simetrine grupe.* Jos eilė yra $n!$.

Jei keitinys s skirtingų skaičių $j_1, \dots, j_s$, $1 \le s \le n$, vaizduoja cikliškai, t.y.

$$j_1 \mapsto j_2 \mapsto \dots j_s \mapsto j_1,$$

o kiti skaičiai paliekami vietoje, tai jį vadiname s ilgio *ciklu.* Tokį keitinį patogu žymėti viena *slankiųjų simbolių* eilute

$$(j_1\, j_2\, \dots\, j_s). \tag{1}$$

1 teorema. *Yra $(s-1)!$ s ilgio ciklų.*

Įrodymas. Anksčiau pastebėjome, kad galime sudaryti $s!$ kėlinių iš s elementų, kurie pagal (1) susitarimą duotų ciklus. Dabar atkreipkime dėmesį į tai, kad žymėdami tą patį ciklą, galėjome pradėti nuo bet kurio elemento ir cikliškai tęsti toliau. Vadinasi, darant iš visų kėlinių ciklus s kartų pasikartos tas pats ciklas. ◇

Jei $\{j_1, \dots, j_s\} \cap \{i_1, \dots, i_m\} = \emptyset$, tai ciklai

$$(j_1, \dots, j_s), \quad (i_1, \dots, i_m)$$

vadinami *nepriklausomais.*

2 teorema. *Kiekvieną keitinį galima išreikšti nepriklausomų ciklų sandauga*

$$\sigma = \kappa_1 \cdots \kappa_w. \tag{2}$$

Čia $w = w(\sigma)$ – ciklų skaičius. Be to, tokia išraiška yra vienintelė daugiklių užrašymo tvarkos tikslumu.

Įrodymas. Panaudokime algoritmizuotus samprotavimus. Jeigu j dar nėra priskirtas nagrinėjamo keitinio σ ciklui, tai raskime mažiausią natūralūjį skaičių m su savybe $j\sigma^m = j$. Toks $m \leq n$ egzistuoja, nes turime ne daugiau negu n skirtingų skaičių sekoje $j\sigma^k$, $k \geq 1$. Sudarome ciklą

$$\kappa := (j \; j\sigma \; \ldots \; j\sigma^{m-1}).$$

Tai iš tiesų yra ciklas, nes lygybė $j\sigma^k = j\sigma^l$ su $1 \leq k < l \leq m = 1$, dėka $j = j\sigma^{l-k}$, prieštarautų m minimalumui. Skaičius m būtų šio ciklo ilgis.

Toliau taip pat skaičius $X \setminus \{j, j\sigma, \ldots, j\sigma^{m-1}\}$ skirstytume į ciklus. Naujasis ciklas būtų nepriklausomas nuo prieš tai sudaryto. Iš tiesų, jei i, $i^p = i$, – skaičius, nepriklausantis pirmajam ciklui, tai lygybė

$$j\sigma^k = i\sigma^l \tag{3}$$

vestų prie sąryšio $j\sigma^{k+p-l} = i$, rodančio, kad i turėtų priklausyti pirmajam ciklui. Prieštara akivaizdi. Išsėmę visus X skaičius, baigiame skaidinio egzistavimo įrodymą.

Jei egzistuotų pora skirtingų skaidinių ciklais, besiskiriančių ne tik išdėstymo tvarka, tai turėtų egzistuoti bent vienas elementas, patenkantis į du ciklus ir todėl jam rastume dvi išraiškas, tarkim, (3). Tai vėl duoda prieštarą. $\diamond$

Kombinatorikai svarbu, kokio ilgio ir kiek ciklų sudaro keitinį. Pažymėkime k_j j ilgio ciklų (2) skaidinyje, $1 \leq j \leq n$. Aišku,

$$1k_1 + \cdots + nk_n = n \tag{4}$$

o ciklų kiekis lygus $w(\sigma) = k_1 + \cdots + k_n$. Vektorių $\bar{k} := \bar{k}(\sigma) = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^{+n}$ vadinsime keitinio σ *struktūros vektoriumi.* Jis turi ir algebrinę prasmę.

Du simetrinės grupės $\mathbf{S}_n$ keitiniai σ ir σ_1 vadinami *jungtiniais*, jeigu egzistuoja $\tau \in \mathbf{S}_n$ toks, kad

$$\sigma = \tau\sigma_1\tau^{-1}. \tag{5}$$

Čia τ^{-1} keitiniui τ atvirkštinis keitinys.

3 teorema. *Du keitiniai yra jungtiniai tada ir tik tada, jei jų struktūros vektoriai sutampa.*

Įrodymas. Tarkime $\kappa = (x_1, \ldots, x_k)$ - keitinio σ_1 ciklas, σ_1 yra jungtinis su σ ir galioja (5) sąryšis. Turime

$$x_1 = x_k\sigma_1, \; x_2 = x_1\sigma_1, \; \ldots, \; x_k = x_{k-1}\sigma_1.$$

Pažymėkime $y_j = x_j\tau^{-1}$, $1 \leq j \leq k$. Patikriname, jog $(y_1, \ldots, y_k)$ - keitinio σ ciklas:

$$y_j\sigma = y_j(\tau\sigma_1\tau^{-1}) = (y_j\tau)(\sigma_1\tau^{-1}) = (x_j\sigma_1)\tau^{-1} = x_{j+1}\tau^{-1} = y_{j+1},$$

jei $j = 1, \ldots, k-1$, ir

$$y_k\sigma = (x_k\sigma_1)\tau^{-1} = x_1\tau^{-1} = y_1.$$

Išreiškę iš (5) keitinį σ_1 per σ, panašiai įsitikintume, jog ir bet koks σ ciklas atitinka σ_1 to paties ilgio ciklą.

Tarkime dabar, kad $\bar{k}(\sigma) = \bar{k}(\sigma_1)$. Imkime jų išraiškas ciklais. Tegu $(x_1 x_2 \dots x_s)$ - bendrasis ciklas keitinyje σ, o $(y_1 y_2 \dots y_s)$ - keitinyje σ_1. Atitinkamai sutvarkius ciklų išdėstymo eilę, sudarykime keitinį

$$\tau = \begin{pmatrix} \dots x_1\, x_2\, \dots\, x_s \dots \\ \dots y_1\, y_2\, \dots\, y_s \dots \end{pmatrix}.$$

Patikrinkime (5) formulę. Du aibės atvaizdžiai lygūs, jei jų reikšmės tuose pačiuose taškuose sutampa. Kaip vaizduoja x_j atvaizdis σ žinom, o į ką atvaizduoja tuos pačius skaičius $\tau\sigma_1\tau^{-1}$, surandame:

$$x_j(\tau\sigma_1\tau^{-1}) = (x_j\tau)\sigma_1\tau^{-1} = (y_j\sigma_1)\tau^{-1} = y_{j+1}\tau^{-1} = x_{j+1},$$

jei $j = 1, \dots, s-1$. Panašiai gautume $x_k(\tau\sigma_1\tau^{-1}) = x_1$. Rastosios reikšmės sutampa su x_j vaizdais, naudojant σ. (5) lygybė įrodyta. $\diamond$

Jungtinmiai elementai grupėje $\mathbf{S}_n$ sudaro atskirą klasę, ją vienareikšmiškai atitinka struktūros vektorius $\bar{k}$, kurio sveikos neneigiamos koordinatės tenkina (4) lygybę.

4 teorema. *Jei simetrinės grupės* $\mathbf{S}_n$ *jungtinių elementų elementų klasė* $S(\bar{k})$ *apibrėžiama struktūros vektoriumi* $\bar{k}$*, tai joje yra*

$$|S(\bar{k})| = n! \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j! j^{k_j}}$$

keitinių.

Įrodymas. Pasinaudojame 2.3 teoremos įrodymo idėja. Turėdami struktūros vektorių, pasidarykime k_j dėžučių, kuriose gali tilpti j, $1 \le j \le n$, skaičių:

$$\overbrace{(\cdot)\dots(\cdot)}^{k_1}\dots\overbrace{\underbrace{(\cdot,\dots,\cdot)}_{j}\dots\underbrace{(\cdot,\dots,\cdot)}_{j}}^{k_j}\dots\overbrace{\underbrace{(\cdot,\dots,\cdot)}_{n}\dots\underbrace{(\cdot,\dots,\cdot)}_{n}}^{k_n}.$$

Bet kaip išdėstydami visus n skaičių į jas, t.y. panaudodami visus $n!$ kėlinių, gauname nurodytos struktūros keitinius. Atkreipkime dėmesį į pasikartojimus. Jų priežastys yra dvi:

(i) ciklų tvarka keitinyje yra nesvarbi;

(ii) j ilgio ciklą galima užrašyti j būdų, keičiant cikliškai jo elementus (žr. 1 teoremos įrodymą).

Kitaip tariant, naudojant įvairius kėlinius, to pačio didumo dėžutės su įrašytais skaičiais galėjo keistis vietomis ir duoti tuos pačius keitinius. Dėl (i) priežasties kievienas keitinys buvo pakartotas

$$k_1! \dots k_j! \dots k_n!$$

kartų, o dėl (ii) priežasties –

$$1^{k_1}\dots j^{k_j}\dots n^{k_n}$$

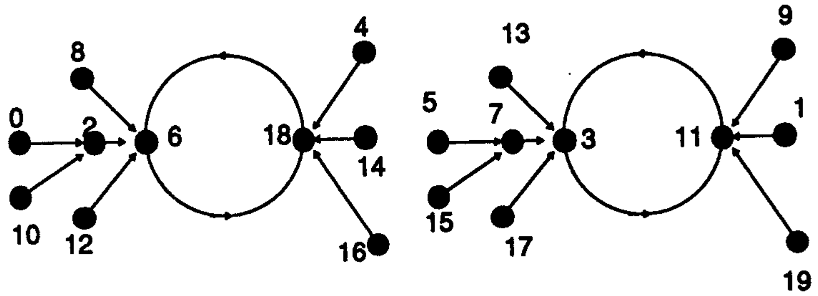
kartų. Padalijęn $n!$ iš šių sandaugų, gauname reikiamą formulę. $\diamond$

8. Visi baigtinės aibės atvaizdžiai

Nagrinėsime visų n aibės $X=\{1,\dots,n\}$ atvaizdžių f į ją pačią aibę $\mathbf{T}_n$. Atvaizdžių sąsūkos atžvilgiu ji sudaro pusgrupį, dažnai vadinamą *simetriniu.* Kaip ir bijekcijų atveju f galime apibrėžti lentele, pavyzdžiui,

$$f=\begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\\ 1,2,2,3,3,4,1,6,9,8\end{pmatrix},$$

nurodančia, kad $f(1)=1,\ f(2)=2, f(3)=2$ ir t.t. Galima vaizduoti ir digrafu, vadinamu *funkciniu* atvaizdžio digrafu (grafu). Atveju $f(x)=x^2+2\bmod 20$ turime paveikslą:



Jame dvidešimties taškšų aibė atvaizduota į ją pačią. Ir taip kiekvieną iš n aibės atvaizdžių f į ją pačią, galime pavaizduoti numeruotuoju digrafu, kurio viršūnių aibė sutampa su aibės X elementais, o briauna (i,j) yra išvesta iš i į j tada ir tik tada, jei $j=f(i)$. Funkcinį grafą determinuojanti savybė galėtų būti formuluojama šitaip: kievienos viršūnės išėjimo laipsnis (iš jos išvestų briaunų skaičius) lygus vienam.

Matome, kad bet kokio funkcinio grafo struktūrą apibrėžia vektorius $\bar{k}(f)=(k_1,\dots,k_n)$, $1k_1+\dots+nk_n=n$, kuriame $k_j=k_j(f)$ žymi j eilės jungių grafo komponenčių skaičių.

Iš atvaizdžio pavaizdavimo lentele matyti, kad visų n aibės atvaizdžių arba funkcinių n eilės grafų skaičius $|\mathbf{T}_n|=n^n$. Tačiau jungių n eilės funkcinių n eilės grafų kiekį C_n surasti gana sunku. Tuo tikslu pasinaudokime eksponentinėmis genruojančiomis funkcijomis (e.g.f.). Pradžioje pastebėkime porą jų savybių.

Tegu

$$A(t)=\sum_{n\ge 0}\frac{a_nt^n}{n!},\quad B(t)=\sum_{n\ge 0}\frac{a_nt^n}{n!}\quad -$$

sekų $\{a_n\}$ ir $\{b_n\}$ e.g.f. Tada

$$A(t)B(t)=\sum_{n\ge 0}\frac{t^n}{n!}\Bigl(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}\Bigr).$$

Taigi, sandauga $A(t)B(t)$ yra apskliaustųjų sumų, kai $n = 0, 1, \dots,$ e..g.f. Panašiai, sekos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{k+1} b_{n-k} \tag{1}$$

e.g.f. bus $A'(t)B(t)$.

Teorema. *Tarkime, T_{nk} - skaičius n eilės funkcinių grafų, turinčių k jungių komponenčių, $T_{n,0} = 0$, $\pi(n)$ - skaičius jungių n eilės funkcinių grafų,*

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^{n} T_{nk} t^k, \quad T_0(t) = 1, \quad \Pi(y) = \sum_{n \geq 1} \frac{\pi(n) y^n}{n!}.$$

Čia t, y - formalūs parametrai. Tada

$$T(t, y) = \sum_{n \geq 0} \frac{T_n(t) y^n}{n!} = \exp\{t\Pi(y)\}.$$

Įrodymas. Raskime rekurentųjį sąryšį tarp $T_{n+1,k}$ ir T_{nk}. Turėdami $(n+1)$-os viršūnės aibę, pastebėkime, jog $n+1$ viršūnė gali būti jungioje komponentėje, kurioje be jos dar yra $j = 0, 1, \dots, n$ kitų viršūnių. Turime $\binom{n}{j}$ jų parinkimo galimybių. Galime sudaryti $\pi(j+1)$ jungių funkcinių grafų su $n+1$ ir šiomis j viršūnių. Likusios $n-j$ viršūnių nepriklausomai gali būti $T_{n-j,k-1}$ funkciniuose grafuose. Taigi,

$$T_{n+1,k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \pi(j+1) T_{n-j,k-1}.$$

Padauginę iš t^k ir sudėję gautąsias lygybes pagal $k = 1, \dots, n+1$, turime

$$T_{n+1}(t) = t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \pi(j+1) T_{n-j}(t).$$

Pagal (1) formulę

$$\sum_{n \geq 0} \frac{T_{n+1}(t) y^n}{n!} = T'_y(t, y) = t \Big(\sum_{n \geq 0} \frac{\pi(n+1) y^n}{n!} \Big) \Big(\sum_{n \geq 0} \frac{T_n(t) y^n}{n!} \Big).$$

Vadinasi,

$$T'_y(t, y) = t\Pi'(y) T(t, y).$$

Integruodami pagal y baigiame teoremos įrodymą. ◇

Išvada. *Teisingas sąryšis*

$$T(y) := T(1, y) = \sum_{n\geq 0} \frac{n^n y^n}{n!} = \exp\{\Pi(y)\}. \tag{2}$$

Iš šioje išvadoje gautojo sąryšio jau būtų galima išvesti funkcijos $\Pi(y)$ Tayloro koeficientų $\pi(n)$ formulę, bet lengviau tą padaryti pasitelkus sekančio skyrelio medžiagą.

9. Numeruotosios kombinatorinės struktūros

Dabar susipažinsime su abstraktesne apibrėžimų sistema, naudojama kombinatorinių struktūrų teorijoje. Galima įsivaizduoti, kad pradedama nuo komponenčių arba nuo jungių kombinatorinių struktūrų, nors toliau įvedamos sąvokos jungumo savybės nereikalauja.

Struktūros yra sudaromos iš elementų (atomų), nurodant jų vidinius ryšius. *Žymėtosiose* struktūrose tiems elementams priskiriami indeksai, dažniausiai skaičiai. Pastaruoju atveju struktūras vadinsime *numeruotosiomis.* Dvi tokios struktūros yra laikomos vienodomis, jei jų elementų numeracijai naudojami tie patys skaičiai ir, sutapatinus vienodai sunumeruotus elementus, vidiniai ryšiai sutampa. Skirtingai apibrėžiant vidinius ryšius tarp elementų, gaunamos skirtingos struktūrų klasės. Fiksuokime vieną tokią klasę $\mathcal{U}$ ir reikalaukime, kad kiekvienam $n \geq 0$ iš n elementų yra sudaroma tik baigtinis skaičius struktūrų, kurių eile (toliau žymėsime $|\cdot|$) laikysime n. Paprastai atvejis $n = 0$ atitinka vieną tuščiąją struktūrą, kuri įjungiama į nagrinėjamą klasę arba ne. $n \geq 1$ eilės struktūros elementų numeracijai naudosime tik skaičius $\{1, \ldots, n\}$. Visą n eilės struktūrų aibę žymėsime $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$, o $u_n = |\mathcal{U}_n|$ – jos elementų skaičių. Pagal susitarimą $u_0 \in \{0, 1\}$. Taigi, klasę sudaro nesikertančių poaibiŲ sąjunga

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n, \quad u_n < \infty.$$

Formali eilutė

$$U(t) = \sum_{u\in\mathcal{U}} \frac{t^{|u|}}{|u|!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n t^n}{n!}$$

vadinama ne tik sekos $\{u_n\}$, $n \geq 0$, bet ir klasės $\mathcal{U}$ *eksponentine generuojančia funkcija* (toliau EGF).

Turėdami dvi numeruotų struktūrų klases $\mathcal{U}$ ir $\mathcal{V}$ ir apibrėšime trečią $\mathcal{W}$, vadinamą *skaidumo sandauga.* Ją sudaro visos *sutvarkytosios* poros $w = (u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ su visais galimais žemiau aprašytais elementų sunumeravimais. Jei $u \in \mathcal{U}$ elementai buvo numeruoti skaičiais $\{1, \ldots, m\}$, o $v \in \mathcal{V}$ – skaičiais $\{1, \ldots, n\}$, tai w numeracijai naudojami skaičiai $\{1, \ldots, m + n\}$, naujoji struktūra w laikoma $n + m$ eilės. Struktūrų u ir v elementai pernumeruojami, dabar naudojant skaičius $\{1, \ldots, m + n\}$, išlaikant buvusį jų sutvarkymą (eiliškumą) ir taip, kad u ir v elementų naujos numeracijos nesikirstų. Formaliai kalbant, skaidumo sandaugos w numeraciją apibrėžia bet kokios dvi monotoniškai didėjančios funkcijos $\theta_1 : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m+n\}$ ir $\theta_2 : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m+n\}$, kurių reikšmių sritys nesikerta, o jų sąjunga yra visa aibė $\{1, \ldots, m+n\}$. Taigi u ir v skaidumo sandauga (ją žymėsim $w = u*v$) yra aibė sutvarkytųjų porų, besiskiriančių pernumeravimu. Aišku, kad būtent θ_i, $i = 1, 2$ monotoniškumas užtikrina ankščiau turėtą struktūrų u ir v elementų sutvarkymą, be to, daugindami skirtingas poras gausime skirtingas skaidumo sandaugas. Visos skaidumo sandaugos $w = u*v$, $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$ sudaro klasių $\mathcal{U}$ ir $\mathcal{V}$ skaidumo sandaugą, kurią žymėsime $\mathcal{W} = \mathcal{U}*\mathcal{V}$. Pagal indukciją apibrėžiama ir bet kokio skaičiaus struktūrų bei jų klasių sandaugos. Atkreipkime dėmesį, kad pradėjome nuo sutvarkytųjų porų (u, v), todėl griežtai kalbant, $\mathcal{U} * \mathcal{V} \neq \mathcal{V} * \mathcal{U}$. Toliau žymėkime

$$\mathcal{U}^{<1>} = \mathcal{U},\ \mathcal{U}^{<2>} = \mathcal{U} * \mathcal{U},\ \ldots \mathcal{U}^{<n>} = \mathcal{U} * \mathcal{U}^{<n-1>}, \ldots.$$

Pradedant nuo nesutvarkytųjų porų, lygiai taip pat apibrėžiame *Abelio skaidumo sandaugas.* Jų žymėjimui naudosime simbolį $[*]$. Dabar

$$\mathcal{U}^{[1]} = \mathcal{U},\ \mathcal{U}^{[2]} = \mathcal{U}[*]\mathcal{U},\ \ldots,\ \mathcal{U}^{[n]} = \mathcal{U}[*]\mathcal{U}^{[n-1]}, \ldots$$

Kadangi yra $n!$ kėlinių, sandaugų $\mathcal{U}^{<n>}$ ir $\mathcal{U}^{[n]}$ EGF riša lygybės

$$U^{<n>}(t) = n! U^{[n]}(t), \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

Skaidumo kompleksu vadinsime aibę

$$\mathcal{U}^{<*>} = \{\emptyset\} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{U}^{<2>} \cup \ldots. \tag{2}$$

Tai nesikertančių aibių sąjunga. Panašiai

$$\mathcal{U}^{[*]} = \{\emptyset\} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{U}^{[2]} \cup \ldots \tag{3}$$

vadinsime *Abelio skaidumo kompleksu* arba *ansambliu.*

Šakniniai numeruotieji miškai bei funkciniai grafai sudaro ansamblius. Pirmuoju atveju pradin struktūrų klasė buvo visų numeruotų medžių klasė, o antruoju – jungių funkcinių digrafų klasė. Pokštieji miškai sudaro skaidumo kompleksą (ne Abelio), nes juose į medžių tvarką yra atsižvelgiama.

1 teorema. *Tegu*

$$U(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{u_n t^n}{n!}, \quad V(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{v_n t^n}{n!} \quad -$$

kombinatorinių struktūrų klasių $\mathcal{U}$ bei $\mathcal{V}$ eksponentinės generuojančios funkcijos (EGF). Skaidumo sandaugos $\mathcal{W} = \mathcal{U} * \mathcal{V}$ EGF

$$W(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{w_n t^n}{n!} = U(t)V(t). \tag{4}$$

Skaidumo komplekso $\mathcal{U}^{<*>}$ *EGF lygi*

$$U^{<*>}(t) := \sum_{w \in \mathcal{U}^{<*>}} \frac{t^{|w|}}{|w|!} = (1 - U(t))^{-1}, \tag{5}$$

o Abelio skaidumo komplekso $\mathcal{U}^{[*]}$ *EGF –*

$$U^{[*]}(t) := \sum_{w \in \mathcal{U}^{[*]}} \frac{t^{|w|}}{|w|!} = e^{U(t)}. \tag{6}$$

Įrodymas. Pastebėkime, kad n eilės skaidumo sandaugų $w = u * v$ galime sudaryti

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k v_{n-k},$$

nes pastaroji lygybė nurodo, kad fiksuotoje sandaugoje viena komponentė yra k, o kita – $(n-k)$ eilės, be to, pirmoji komponentė yra numeruota bet kokiu k indeksų poaibiu iš $\{1, \ldots, n\}$. Taigi,

$$\frac{w_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} \, \frac{v_{n-k}}{(n-k)!}.$$

Iš čia išplaukia (4) formulė.

Pasinaudoję ja bei (2) lygybe, gauname

$$U^{<*>}(t) = \sum_{n \geq 0} \sum_{w \in \mathcal{U}^{<n>}} \frac{t^{|w|}}{|w|!} = \sum_{n \geq 0} U(t)^n = (1 - U(t))^{-1}.$$

Abelio skaidumo kompleksui, pasinaudoję (1), turime bei

$$U^{[*]}(t) = \sum_{n \geq 0} \sum_{w \in \mathcal{U}^{[n]}} \frac{t^{|w|}}{|w|!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathcal{U}^{<n>}} \frac{t^{|w|}}{|w|!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} F(t)^n = e^{U(t)}.$$

$\diamond$

Palyginkime gautą rezultatą su 8 skyrelio teoremos išvada. Ji teigia, kad funkcinių digrafų klasės EGF tenkina lygybę

$$T(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} y^n = \exp\left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{\pi(n)}{n!} y^n \right\},$$

čia $\pi(n)$ – jungių funkcinių digrafų skaičius. Kadangi funkciniai digrafai yra jungių digrafų nesutvarkytieji rinkiniai ir funkciniai digrafai yra jungių digrafų generuotas ansamblis, pastarasis ryšis yra 1 teoremos išvada.

Panagrinėkime kitą pavyzdį. Tegu $\mathcal{U}$ keitinių ciklų klasė. Turėdami $n \geq 1$ skaičių $\{1, \ldots, n\}$ galime sudaryti $n!$ kėlinių $(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n)$. Kadangi ciklams galioja

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n) = (i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n, i_1) = \cdots = (i_n, i_1, \ldots, i_{n-1}),$$

gausime $(n-1)!$ ciklų. Vadinasi, tokių ciklų klasės EGF lygi

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n-1)!}{n!} t^n = \log(1-t)^{-1}.$$

Abelio skaidumo sandauga $\mathcal{U}^{[n]}$ duotų visus keitinius, sudarytus iš n ciklų. Jos EGF lygi

$$U^{[n]}(t) = \frac{1}{n!} \log^n (1-t)^{-1}.$$

Keitiniai sudarytų ciklų klasės generuotą ansamblį, todėl jo EGF

$$\mathcal{U}^{<*>} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \log^n (1-t)^{-1} = \frac{1}{1-t},$$

ką mes turėjome ir anksčiau.

Ciklus galime sudarinėti ir iš kitokių negu skaičiai kombinatorinių struktūrų, pvz., medžių. Kokia bus EGF, jei pradėsime nuo struktūrų klasės su EGF $A(t)$?

2 teorema. *Iš kombinatorinių struktūrų klasės $\mathcal{A}$ su EGF $A(t)$ sudarytų ciklų klasės EGF bus lygi*

$$C(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} t^n = \log\big(1 - A(t)\big)^{-1}.$$

Įrodymas. Kaip matėme anksčiau, n eilės sutvarkytų rinkinių, daromų iš $\mathcal{A}$, EGF lygi $A^n(t)$; ciklams kiekvienas jos koeficientas yra n kartų mažesnis. Tad,

$$C(t) = A(t) + \frac{A^2(t)}{2} + \cdots + \frac{A^n(t)}{n} + \cdots .$$

Tai ir yra 2 teoremos tvirtinimas. ◇

Iš 1 ir 2 teoremų išplaukia įdomių kompleksų generuojančių funkcijų savybių.

1 išvada. *Tegu*

$$D(t) := \sum_{n\geq 1} \frac{d_n t^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{n^{n-1} t^n}{n!} \quad -$$

Cayley'io medžių EGF. Tada $D(t) = te^{D(t)}$, kai $|t| < e^{-1}$.

Įrodymas. Pasinaudoję Stirlingo formule, nesunkiai nustatome eilutės $D(t)$ konvergavimo sritį $|t| < e^{-1}$. Pastebime, kad šakniniai miškai sudaro Cayley'io medžių ansamblį. Vadinasi, pagal 1 teoremą jų EGF išsireiškia per $D(t)$. Gauname

$$Q(t) := \sum_{n\geq 0} \frac{q_n t^n}{n!} = e^{D(t)}.$$

Pagal 6.2 teoremą $q_n = d_{n+1}/(n+1)$, todėl

$$Q(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{d_{n+1}t^n}{(n+1)!} = t^{-1}D(t).$$

$\diamond$

2 išvada. *Tegu $\Pi(t)$ – jungių funkcinių digrafų EGF, o $T(t)$ – visų funkcinių digrafų ansamblio EGF. Tai srityje $|t| < e^{-1}$*

$$\Pi(t) = \log\big(1 - D(t)\big)^{-1}, \qquad T(t) = \frac{1}{1 - D(t)}.$$

Įrodymas. Kiekviena funkcinio digrafo komponentė yra sudaryta iš ciklo ir Cayley'io medžių, kurių briaunos šįkart turi kryptis nukreiptas į šaknis, esančias šiame cikle. Medžiai gali būti ir pirmos eilės, tai bus ciklo viršūnės. Ciklas apibrėžia ir medžių išdėstymo tvarką, sukeitus bent du iš jų, gaunamas kito atvaizdžio digrafas. Kitaip tariant, į jungią funkcinio digrafo komponentę galime žiūrėti kaip į medžių ciklą. Jei $\pi(n)$ – n eilės jungių funkcinių digrafų skaičius, $n \geq 1$, tai šis skaičius reikš ir tos pačios eilės medžių ciklų kiekį. Pagal 2 teoremą medžių ciklų klasės EGF lygi

$$\log\big(1 - D(t)\big)^{-1}.$$

Kadangi $\mathcal{T}$ yra šios klasės generuotas ansamblis, pagal 1 teoremą gauname

$$T(t) = \exp\Big\{\log\big(1 - D(t)\big)^{-1}\Big\} = \big(1 - D(t)\big)^{-1}. \tag{6}$$

Išvada įrodyta. $\diamond$

Naudojant 1 ir 2 išvadas ir šią lygybę nebesunku rasti $\pi(n)$ bei jo asimptotiką, kai $n \to \infty$.

Lagrange lema. *Tegu funkcija $f(z)$ yra netiesiogiai apibrėžta lygybės*

$$f(z) = z\phi(f(z)) \tag{7}$$

pagalba, kai $\phi(u)$ – analizinė taško $u = 0$ aplinkoje ir $\phi(0) = 1$. Jei $g(z)$ yra analizinė taško $z = 0$ aplinkoje, tai sudėtinė funkcija $g(f(z))$ irgi yra analizinė kažkokioje nulinio taško aplinkoje, be to, jos n-asis Tayloro koeficientas lygus funkcijos $\phi(u)^n g'(u)$ $(n-1)$-am Tayloro koeficientui c_{n-1}, padalytam iš n.

Įrodymas. Tegu $u = f(z)$ ir $z = z(u)$ – jai atvirkštinė funkcija. Iš (7) turime, kad $z = u/\phi(u)$. Pagal lemos sąlygas abi yra analizinės tam tikrose nulinių taškų aplinkose. Todėl naudodami Koši formulę su pakankamai mažais $\rho, \rho_1 > 0$, gauname

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=\rho} \frac{\phi(u)^n g'(u)}{u^n}\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=\rho} \frac{g'(u)}{z(u)^n}\,du = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho_1} \frac{g'(f(z))f'(z)}{z^n}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho_1} \frac{d\big(g(f(z))\big)}{z^n} = \\ &= \frac{n}{2\pi i}\int_{|z|=\rho_1} \frac{g(f(z))\,dz}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

Įžiūrėję pastarojo integralo prasmę, baigiame lemos įrodymą. $\diamond$

3 teorema. *Jungių $n \geq 1$ eilės funkcinių grafų skaičius*

$$\pi(n) = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} = n! e^n \left(\frac{1}{2n} + O(n^{-3/2}) \right),$$

Įrodymas. Teoremos 1 pirmoje išvadoje gavome $D(z) = ze^{D(z)}$. Pagal (6) reikia rasti n-ą funkcijos $\log(1 - D(z))^{-1}$ Tayloro koeficientą ir padauginti jį iš $n!$. Pasinaudojame Lagrange lema, kai $\phi(u) = e^u$, o $g(u) = \log(1-u)^{-1}$, ir gauname $\phi^n(u)g'(u) = e^{nu}/(1-u)$. Nesunkiai randame $(n-1)$-ą Tayloro koeficientą. Jis lygus $\sum_{0 \leq k \leq n-1} n^k/k!$. Padalijęs iš n ir padauginę iš $n!$, randame $\pi(n)$ išraišką.

Sumos aproksimavimui pasinaudokime Bery-Eseno teorema apie konvergavimo greitį centrinėje ribinėje teoremoje. Tegu $S_n = Z_1 + ... + Z_n$ – nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių Poissono dydžių su vienetiniu parametru ($\mathbf{E}Z_j = 1$) suma. Todėl S_n irgi Poissono dydis su parametru n, o

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} = P(S_n \leq n-1) = P((S_n - n)/\sqrt{n} \leq -1/\sqrt{n}) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1/\sqrt{n}} e^{-u^2/2}\, du + O(n^{-1/2}) = \frac{1}{2} + O(n^{-1/2}).$$

Įstatę šį įvertį į $\pi(n)$ išraišką, baigiame teoremos įrodymą. $\diamond$

Palyginimui pastebėkime, kad jungiųjų n eilės funkcinių digrafų ir visų tokios eilės digrafų santykis

$$\frac{\pi(n)}{n^n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \quad n \to \infty.$$

Panašiai išvystoma ir nenumeruotųjų kombinatorinių struktūrų teorija.

10. Nenumeruotųjų struktūrų kompleksai

Nagrinėti nenumeruotų struktūrų pavyzdžiai turi bendrą bruožą: sudėtingesni objektai yra sudaryti iš atskirų dalių. Polinomus sudaro pirminiai daugikliai, binariuosius medžius - pomedžiai, į kurių tvarką yra atsižvelgiama . Atskiros dalys gali būti net lygios. Nagrinėjamus objektus, turinčius apibrėžtą natūralųjį skaičių *svorį* (atskirais atvejais tai gali būti laipsnis, eilė ir pan.), vadinkime *svorinėmis kombinatorinėmis struktūromis.* Tegu $\mathcal{P}$ yra tam tikra kombinatorinių struktūrų klasė, $\kappa \in \mathcal{P}$ viena struktūra, o $w(\kappa)$ - jos svoris. Reikalaukime, kad klasėje $\mathcal{P}$ yra tik baigtinis n svorio struktūrų skaičius

$$\pi_n = |\{\kappa \in \mathcal{P} :\ w(\kappa) = n\}|, \quad n \geq 1.$$

Bet koks rinkinys

$$\sigma := \{\kappa_1, \ldots, \kappa_s\}, \quad \kappa_i \in \mathcal{P}, \quad 1 \leq i \leq s,$$

gal būt pasikartojančių elementų gali būti laikomas nauja kombinatorine struktūra. Tuo tikslu, reikia suteikti jai svorį. Natūralu jį apibrėžti lygybe

$$w(\sigma) = w(\kappa_1) + \cdots + w(\kappa_s).$$

Tuščiajam rinkiniui $\sigma = \emptyset$ suteikime nulinį svorį. Taip apibrėžtos struktūros σ vadinamos *kartotinėmis aibėmis*, o jų visuma, įskaitant ir tuščią, - aibės $\mathcal{P}$ *kartotinių poaibių struktūra*. Ją žymėkime $K(\mathcal{P})$.

Pirminių polinomų, kurių vyriausias koeficientas lygus vienam, virš baigtinio kūno rinkinys yra geriausias tokios kartotinės struktūros pavyzdys. Sutapatinę ją su rinkinio polinomų sandauga, visų polinomų aibę galėtume laikyti kartotine pirminių polinomų struktūra. Aišku, kad svorių vaidmenį vaidina polinomų laipsniai; $\pi_n = \pi(n)$ - skaičių n-ojo laipsnio pirminių polinomų - nagrinėjome 3 skyrelyje.

Žvelgdami į natūraliojo skaičiaus adityviojo skaidinio dėmenis kaip į natūraliųjų skaičių aibės kartotinį poaibį, tokius skaidinius irgi galėtume vadinti kartotinių poaibių struktūra, kurioje svorio vaidmenį vaidina natūraliųjų skaičių didumai. Dabar $\pi_k = 1$ su kiekvienu $k \in \mathbf{N}$.

Pradėdami nuo $\mathcal{P}$ poaibių, (dabar pasikartojančių elementų κ_i neimtume), panašiai gautume aibės $\mathcal{P}$ *poaibių struktūrą*. Ją žymėkime $P(\mathcal{P})$.

Formalias laipsnines eilutes

$$\Pi(z) = \sum_{\kappa\in\mathcal{P}} z^{w(\kappa)} = \sum_{n=0} \Big(\sum_{w(\kappa)=n} 1 \Big) z^n =: \sum_{n=0} \pi_n t^n,$$

$$K(z) = \sum_{\sigma\in K(\mathcal{P})} z^{w(\sigma)} = \sum_{n=0} \Big(\sum_{w(\sigma)=n} 1 \Big) z^n =: \sum_{n=0} k_n t^n$$

ir

$$P(z) = \sum_{\sigma\in P(\mathcal{P})} z^{w(\sigma)} = \sum_{n=0} \Big(\sum_{w(\sigma)=n} 1 \Big) z^n =: \sum_{n=0} p_n z^n.$$

vadinkime atitinkamų struktūrų $\mathcal{P}$, $K(\mathcal{P})$ ir $P(\mathcal{P})$ arba sekų $\{\pi_n\}$, $\{k_n\}$ bei $\{p_n\}$ *generuojančiomis funkcijomis*. Raskime jų sąryšius.

1 teorema. *Teisingos formalios lygybės*:

$$K(z) = \exp\Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Pi(z^m)}{m} \Big\},$$

$$P(z) = \exp\Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \Pi(z^m)}{m} \Big\}.$$

Įrodymas. Kaip ir 3 skyrelyje gauname

$$k_n = \sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbf{Z}^{+n} \\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi_j + k_j - 1}{k_j}.$$

Vadinasi, pakartoję ankstesnius skaičiavimus, įrodytume lygybę

$$K(z) = \sum_{n\geq 0} k_n z^n = \prod_{j\geq 1}(1-z^j)^{-\pi_j}.$$

Toliau panaudodami logaritminės funkcijos skleidimo Tayloro eilute formulę, gauname

$$K(z) = \exp\Big\{\sum_{j\geq 1}\pi_j \sum_{m\geq 1}\frac{z^{mj}}{k}\Big\} = \exp\Big\{\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}\Pi(z^m)\Big\}.$$

Antrosios įrodymui pastebėkime, kad

$$p_n = \sum_{\substack{\bar{k}\in \mathbf{Z}^{+n}\\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n}\binom{\pi_j}{k_j}.$$

Be to,

$$\prod_{j\geq 1}(1+z^j)^{\pi_j} = \prod_{j\geq 1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\pi_j}{k}z^{kj} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{\substack{\bar{k}\in \mathbf{Z}^{+n}\\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n}\binom{\pi_j}{k_j} = P(z).$$

Logaritmuodami sandaugą, kaip ir anksčiau iš čia gautume antrąją lemos lygybę. ◇

Turėdami keletą skirtingų pradinių struktūrų klasių $\mathcal{P}_k,\ k\geq 2$, galėtume sudaryti dar įdomesnių naujų struktūrų. Dabar apibrėšime sekų struktūrą. Tegu $\mathcal{P}'$ ir $\mathcal{P}''$ dvi struktūros. *Sutvarkytųjų porų struktūra* vadinsime $\mathcal{P}'\times\mathcal{P}''$, kurioje poros $\sigma := (\kappa', \kappa'')$ svoriu laikoma $w(\sigma) = w(\kappa') + w(\kappa'')$. Panašiai apibrėšime ir $\mathcal{P}$ laipsnius.

1 teorema. *Jei π'_k ir π''_k yra k-ojo svorio struktūrų aibėse $\mathcal{P}'$ ir $\mathcal{P}''$ skaičiai, tai n-jo svorio sutvarkytųjų porų struktūrų yra*

$$\sum_{k=1}^{n-1}\pi'_k\pi''_{n-k}.$$

Įrodymas. Išplaukia iš apibrėžimų. ◇

Aibės

$$\{\emptyset\}\cup\mathcal{P}\cup\mathcal{P}^2\cup\ldots$$

elementai vadinami $\mathcal{P}$ *sekų struktūromis.* Žymėkime ją $S(\mathcal{P})$.

2 teorema. *Sekų struktūros generuojanti funkcija lygi*

$$\sum_{\sigma\in S(\mathcal{P})} z^{w(\sigma)} = 1 + \Pi(z) + \Pi(z)^2 + \cdots = \frac{1}{1-\Pi(z)}.$$

Įrodymas. Išplaukia iš apibrėžimų. $\diamond$

Dar kartą prisiminkime binariuosius medžius ir Katalano skaičius. Kadangi kiekvienas binarusis medis T yra arba viena išorinė viršūnė $\circ$, arba vidinė viršūnė $*$ ir dviejų binariųjų medžių seka, todėl gauname tokią formalią schemą:

$$\{T\} = \{\circ\} \cup \{(*, T, T)\}.$$

Čia paskutinė aibė yra sudaryta iš sekų. Priskirdami išorinėms viršūnėms vienetinius svorius, o vidinėms viršūnėms - nulius, gautume nagrinėtas struktūras. Užrašę atitinkamas generuojančias funkcijas, gauname lygybę

$$C(z) := \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n = z + 1 \cdot C(z) \cdot C(z) = z + C^2(z),$$

kurią jau buvome 4 skyrelyje.

Kaip ir praeitame skyrelyje galėtume apibrėšti ir nenumeruotų struktūrą ciklų klasę. Reziumuodami akcentuosime, kad formalus naujų struktūrų klasių sudarymas duoda ir jų generuojanių funkcijų ryšius. Panaudodami pastaruosius, galime naujas struktūras suskaičiuoti.

II. TIKIMYBINIAI UŽDAVINIAI

10. Sąlyginių skirstinių panaudojimas

Apsiribokime numeruotosios struktūros $\mathcal{U}$ poaibių struktūra $\mathcal{A} := \mathcal{U}^{[*]}$, kurią trumpumo dėlei vadinkime *ansamblių* struktūra. Tarkime, kad $|\mathcal{U}_j| = m_j$, o $|\mathcal{A}_n| = p(n)$ yra atitinkamų eilių struktūrų skaičiai. Pagal 9 skyrelio teoremą gauname sąryšį

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{n!} t^n = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{j!} t^j \right\}.$$

Iš čia išplaukia lygybė

$$p(n) = n! \sum_{1k_1+\cdots+nk_n=n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{m_j}{j!} \right)^{k_j} \frac{1}{k_j!}. \tag{1}$$

Ši lygybė turi ir kitokią kombinatorinę prasmę. Norėdami ją įžvelgti, suskaičiuokime n-os eilės ansamblių skaičių kitu būdu.

Tegu $\bar{k}(\sigma) = (k_1(\sigma), \dots, k_n(\sigma))$ yra ansamblio σ struktūros vektorius. Kaip įrodėme 2 skyrelyje, iš viso yra

$$n! \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j!(j!)^{k_j}}$$

galimybių išskaidyti n aibę nesikertančių poaibių sąjungomis taip, kad gautume k_j poaibių, turinčių j elementų, $1k_1 + \cdots + nk_n = n$. Iš kiekvieno j-os eilės poaibio galime sudaryti m_j numeruotųjų pradinių galimų ansamblio komponenčių. Taigi, visoms jo k_j j-os eilės komponentėms parinkti gauname $m_j^{k_j}$ variantų. Taigi, iš viso yra

$$n! \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j!} \left(\frac{m_j}{j!} \right)^{k_j} = |\{\sigma \in \mathcal{A} : \ \bar{k}(\sigma) = \bar{k}\}| \tag{2}$$

ansamblių, turinčių fiksuotą struktūros vektorių $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n)$. Sumuodami pagal visus struktūros vektorius, iš čia gauname (1) formulę.

Ansamblių aibėje $\mathcal{A}_n$ apibrėžkime tikimybinį matą, imdami

$$\nu_n(\{\sigma\}) = \frac{1}{p(n)}, \quad \sigma \in \mathcal{A}_n,$$

arba $\nu_n(...) = \frac{1}{p(n)} |\{\sigma \in \mathcal{A}_n : \ ...\}|$.

Iš (2) formulės matome, kad

$$\nu_n(\bar{k}(\sigma) = \bar{k}) = \mathbf{1}\{1k_1 + \cdots + nk_n = n\} \frac{n!}{p(n)} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j!} \left(\frac{m_j}{j!} \right)^{k_j}. \tag{3}$$

Dažnai tikimybinius kombinatorinių struktūrų uždavinius galima interpretuoti kaip nepriklausomų atsitiktinių dydžių (a.d.) sąlyginių skirstinių nagrinėjimą. Kokie tie atsitiktiniai dydžiai ir kokios sąlygos, jei nagrinėjame atvaizdžių, apibrėžtų ansamblių klasėje, skirstinius dažnio ν_n atžvilgiu?

Primename, jog a.d. X sąlyginiu vidurkiu a.d. Y, įgyjančio sveikas neneigiamas reikšmes, atžvilgiu vadiname atsitiktinį dydį

$$\mathbf{E}(X|\,Y) = \sum_{n\geq 0} \mathbf{E}(X|\,Y=n)\mathbf{1}(\{\omega:\ Y=n\}).$$

Čia $\mathbf{1}(A)$ - atsitiktinio įvykio A indikatorius. Be to,

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\,Y)) = \sum_{n\geq 0} \mathbf{E}(X|\,Y=n)P(Y=n), \tag{4}$$

jei $\mathbf{E}X$ egzistuoja. Tegu, kaip ir anksčiau, $m_j \geq 0$ – ansamblių klasę charakterizuojantys parametrai.

1 teorema. *Tarkime,* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *– nepriklausomų Poisson'o a.d. seka,*

$$\mathbf{E}(\xi_j) = x^j m_j/j! =: \lambda_j(x).$$

Jei

$$\lambda_j(x_0) \leq \lambda < \infty, \quad x_0 > 0,$$

tai bet kokiam x, $0 < x < x_0$ *a.d. eilutė*

$$\sum_{j\geq 1} j\xi_j =: \zeta$$

konverguoja su tikimybe 1.

Įrodymas. Įsitikiname, jog

$$\sum_{j\geq 1} P(\xi_j \neq 0) < \infty. \tag{5}$$

Kadangi iš nelygybės $1 - e^{-t} \leq t,\ t \geq 0$, ir lemos sąlygos išplaukia

$$P(\xi_j \neq 0) = 1 - P(\xi_j = 0) = 1 - \exp\{-(x/x_0)^j x_0^j m_j/j!\} \leq \lambda(x_0)(x/x_0)^j \ll (x/x_0)^j,$$

todėl (5) įvertis yra akivaizdus. Dabar pagal Borelio-Kantelio lemą su vienetine tikimybe įvykiai $\xi_j = 0$ įvyksta visiems indeksams j, išskyrus baigtinį jų skaičių. Iš čia gauname norimą tvirtinimą. $\diamond$

Tegu ateityje $\bar{\xi}_n = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ ir $\zeta_n = 1\xi_1 + 2\xi_2 + \cdots + n\xi_n$. Be to, šiame skyrelyje tarsime, kad 1 lemos sąlyga yra patenkinta. Kai $0 < x < x_0$, sveikareikšmis a.d. $\zeta =$

$1\xi_1 + 2\xi_2 + \cdots$ yra korektiškai apibrėžtas, todėl galėsime naudoti ir sąlyginius jo atžvilgiu vidurkius.

2 teorema. *Bet kokiam $x > 0$ ir $\bar{k} \in \mathbf{Z}^{+n}$*

$$\nu_n(\bar{k}(\sigma) = \bar{k}) = P(\bar{\xi}_n = \bar{k} |\, \zeta_n = n).$$

Jei be to, $0 < x < x_0$, tai pratęsus vektorių $\bar{k}(\sigma)$ nuliais iki begalinio vektoriaus, t.y. pažymėjus $\bar{k}(\sigma) := (k_1(\sigma), \ldots, k_n(\sigma), 0, \ldots)$, kiekvienam $\bar{k} \in \mathbf{Z}^{+\infty}$ teisinga lygybė

$$\nu_n(\bar{k}(\sigma) = \bar{k}) = P(\bar{\xi} = \bar{k} |\, \zeta = n).$$

Įrodymas. Pastebėkime, jog tiek n-mačiu, tiek begaliniu vektoriaus $\bar{k}$ atveju, kai nepatenkinta sąlyga

$$(*) \qquad 1k_1 + \cdots + nk_n = n,$$

visos užrašytosios tikimybės lygios nuliui. Tegu toliau (*) yra patenkinta. Begaliniu atveju iš čia gauname $k_{n+1} = k_{n+2} = \cdots = 0$. Skaičiuojame

$$\begin{aligned} P(\zeta_n = n) &= \sum_{\bar{k}} \prod_{j=1}^{n} P(\xi_j = k_j) = \exp\Big\{ -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) \Big\} \sum_{\bar{k}} \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j(x)^{k_j}}{k_j!} = \\ &= x^n \exp\Big\{ -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) \Big\} \sum_{\bar{k}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{m_j}{j!}\right)^{k_j} \frac{1}{k_j!} = \\ &= \frac{x^n p(n)}{n!} \exp\Big\{ -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) \Big\}. \end{aligned}$$

Čia kaip ir anksčiau sumos imamos pagal $\bar{k} \in \mathbf{Z}^{+n}$, tenkinančius sąlygą (*). Kadangi prie (*) sąlygos

$$P(\bar{\xi}_n = \bar{k},\ \zeta_n = n) = P(\bar{\xi}_n = \bar{k}) = \prod_{j=1}^{n} P(\xi_j = k_j),$$

tai iš paskutinių dviejų lygybių išplaukia

$$\begin{aligned} P(\bar{\xi}_n = \bar{k} |\, \zeta_n = n) &= \frac{P(\bar{\xi}_n = \bar{k},\ \zeta_n = n)}{P(\zeta_n = n)} = \\ &= \frac{1}{p(n)} \left(n! \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{m_j}{j!}\right)^{k_j} \frac{1}{k_j!} \right). \end{aligned}$$

Pagal (3) formulę dešinėje pusėje esantis santykis yra dažnis $\nu_n(\bar{k}(\sigma) = \bar{k})$. Tuo pačiu pirmasis lemos tvirtinimas yra įrodytas.

Kaip minėjome, prie lemos sąlygų bei (*) atsitiktinis dydis ζ yra apibrėžtas ir $k_{n+1} = k_{n+2} = \cdots = 0$, todėl dydžių nepriklausomumo dėka gauname

$$P(\bar{\xi} = \bar{k} |\, \zeta = n) = \frac{P(\bar{\xi}_n = \bar{k},\, \zeta_n = n) P(\xi_{n+1} = \xi_{n+2} = \cdots = 0)}{P(\zeta_n = n) P(\xi_{n+1} = \xi_{n+2} = \cdots = 0)}.$$

Taigi, suprastinę vėl turime tas pačias tikimybes. $\diamond$

Kadangi pagal eksponentinės generuojančios funkcijos išraišką sandauga

$$P(\zeta = n) = P(\zeta_n = n) \prod_{j=n+1}^{\infty} P(\xi_j = 0) = \frac{x^n p(n)}{Z(x) n!}, \tag{6}$$

naudoti sąlygines tikimybes su a.d. ζ žymiai patogiau. Pirmosios lemos sąlyga užtikrina ir eilutės $Z(x)$ konvergavimą netgi platesnėje srityje $|x| < x_0$, netgi laikant $x \in \mathbf{C}$.

Tarkime, kad $\Phi : \mathbf{Z}^{+\infty} \to \mathbf{C}$ ir kaip anksčiau, $\bar{k}(\sigma) := (k_1(\sigma), \ldots, k_n(\sigma), 0, \ldots)$, palyginkime a.d. $\Phi(\bar{k}(\sigma))$ vidurkį erdvėje $\{\mathcal{S}, 2^{\mathcal{S}}, \nu_n\}$ su sąlyginiu vidurkiu a.d. $\Phi(\bar{\xi})$, apibrėžto, tarkim erdvėje $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. Vengdami dviprasmiškumo, kalbėdami apie pirmąją erdvę, prie vidurkio žymens $\mathbf{E}$ pridėkime indeksą n, o antroje erdvėje – x.

3 teorema. *Jei vidurkis $\mathbf{E}_x(\Phi(\bar{\xi}))$ yra apibrėžtas, tai srityje $|x| < x_0$*

$$\mathbf{E}_x(\Phi(\bar{\xi})) = \frac{1}{Z(x)} \sum_{n \geq 0} \frac{p(n) x^n}{n!} \mathbf{E}_n(\Phi(\bar{k}(\sigma)).$$

Įrodymas. Iš 2 teoremos išplaukia

$$\mathbf{E}_n(\Phi(\bar{k}(\sigma)) = \mathbf{E}_x(\Phi(\bar{k}) |\, \zeta = n).$$

Todėl pagal (4) lygybę gauname

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_x(\Phi(\bar{\xi})) = \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_x(\Phi(\bar{\xi}) |\, \zeta)) = \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}_x(\Phi(\bar{\xi}) |\, \zeta = n) P(\zeta = n) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}_n(\Phi(\bar{k}(\sigma)) P(\zeta = n). \end{aligned}$$

Pasinaudoję (6) formule baigiame 3 lemos įrodymą.

Pritaikykime gautą lygybę atsitiktinių keitinių atveju. Dabar 1 teoremos sąlyga yra patenkinta su $x_0 = 1$.

Išvada. *Jei vidurkis $\mathbf{E}_x(\Phi(\bar{\xi}))$ yra apibrėžtas ir $x < 1$, tai keitinių ansambliui teisinga lygybė*

$$\mathbf{E}_x(\Phi(\bar{\xi})) = (1 - x) \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}_n(\Phi(\bar{k}(\sigma)) x^n.$$

Įrodymas. Pakanka prisiminti, jog $p(n) = n!$, $Z(x) = (1 - x)^{-1}$, ir pritaikyti 3 lemą. $\diamond$

11. Gončarovo teoremos

Apsiribokime istoriškai svarbiu simetrinės grupės atveju. Atsitiktinio keitinio σ stuktūros vektorių $\bar{k}(\sigma) = (k_1(\sigma), k_2(\sigma), \dots)$ patogu laikyti diskretaus laiko stochastiniu procesu. Pažymėkime

$$\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$$

diskretaus laiko procesą su nepriklausomomis reikšmėmis ξ_j momentais $j = 1, 2, \dots$. Dabar ξ_j nepriklausomi Poisson'o a.d. su vidurkiais $1/j$ atitinkamai. Dabar anksčiau buvęs parametras x čia laikomas 1. Tikėdamiesi, kad galėsime pereiti ir prie ribos, kai $x \to 1-$, galime spėti, kad $\bar{k}(\sigma)$ silpnai konverguoja į procesą Ξ. Čia turime omenyje baigtinamačių skirstinių

$$\nu_n\Big((k_{j_1}(\sigma), \dots, k_{j_m}(\sigma)) = (k_{j_1}, \dots, k_{j_m})\Big)$$

konvergavimą į tikimybes

$$P\Big((\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_m}) = (k_{j_1}, \dots, k_{j_m})\Big) = \prod_{s=1}^{m} P(\xi_{j_s} = k_{j_s})$$

kiekvienam fiksuotam $m \ge 1$ ir vektoriui $(k_{j_1}, \dots, k_{j_m}) \in \mathbf{Z}^{+^m}$. Tokį konvergavimą pažymėkime $\bar{k}(\sigma) \stackrel{\nu_n}{\Rightarrow} \Xi$.

1 (Gončiarovo) teorema (1942). *Simetrinės grupės keitinių ansamblyje*

$$\bar{k}(\sigma) \stackrel{\nu_n}{\Rightarrow} \Xi,$$

jei $n \to \infty$.

Įrodymas. Paprastumo dėlei imkime pirmąsias m koordinačių. Pakanka įrodyti charakteristinių funkcijų

$$\begin{aligned}\varphi_n(t_1, \dots, t_m) :&= \mathbf{E}_n \exp\{it_1 k_1(\sigma) + \dots + it_m k_m(\sigma)\} = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \exp\{it_1 k_1(\sigma) + \dots + it_m k_m(\sigma)\}\end{aligned}$$

konvergavimą į m-matę charakteristinę funkciją. Todėl pasinaudokime paskutine praeito skyrelio išvada su

$$\Phi(\bar{k}) := \exp\{it_1 k_1 + \dots + it_m k_m\}.$$

Gauname

$$\mathbf{E}_x(\Phi(\bar{\xi})) = (1 - x) \sum_{n \ge 0} \mathbf{E}_n(\Phi(\bar{k}(\sigma)) x^n.$$

Kairioje pusėje esantį vidurkį lengva surasti, nes jis yra m-mačio nepriklausomų koordinačių Poissono vektoriaus charakteristinė funkcija. Taigi,

$$\mathbf{E}_x(\Phi(\bar{\xi})) = \prod_{j=1}^{m} \exp\big\{\frac{x^j}{j}(e^{it_j}-1)\big\} =$$
$$= \sum_{l\geq 0}\Big(\sum_{1k_1+\cdots+mk_m=l}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{j^{k_j}k_j!}(e^{it_j}-1)^{k_j}\Big)x^l =: \sum_{l\geq 0} A_l x^l.$$

Iš paskutinių dviejų išraiškų matome, kad ieškomasis vidurkis $\mathbf{E}_n(\Phi(\bar{k}(\sigma))$ arba charakteristinė funkcija yra funkcijos

$$\frac{1}{1-x}\sum_{l\geq 0} A_l x^l = \Big(\sum_{k\geq 0} x^k\Big)\Big(\sum_{l\geq 0} A_l x^l\Big),$$

kuri apibrėžta intervale $(-1,1)$, n-asis Tayloro koeficientas. Iš A_l išraiškos matome, kad šis koeficientas lygus

$$\varphi_n(t_1,\dots,t_m) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{1k_1+\cdots+mk_m=l}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{j^{k_j}k_j!}(e^{it_j}-1)^{k_j} =$$
$$= \sum_{1k_1+\cdots+mk_m\leq n}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{j^{k_j}k_j!}(e^{it_j}-1)^{k_j}.$$

Čia sumuojama pagal vektorius su sveikomis neneigiamomis koordinatėmis, tenkinančiomis užrašytą tiesinę nelygybę. Kai $n\to\infty$, šio nelygybe apibrėžto apribojimo nebelieka, sumos pagal atskirus $k_j\geq 0$ atsiskiria, todėl

$$\varphi_n(t_1,\dots,t_m) \to \prod_{j=1}^{m}\sum_{k\geq 0}\frac{(e^{it_j}-1)^k}{j^k k!} = \prod_{j=1}^{m}\exp\big\{\frac{1}{j}(e^{it_j}-1)\big\}.$$

Tą ir reikėjo įrodyti. $\diamond$

Pritaikykime "kinų restorano problemai:

n džentelmenų, užėję į kinų restoraną pietauti, atidavė savo skrybėles rūbinėje. Po pietų jos buvo gražintos atsitiktinai. Raskite tikimybės, kad lygiai k džentelmenų atgavo savo skrybėles ribą, kai $n\to\infty$?

Sprendimas. Kaip įprasta, žodį "atsitiktinai" supraskime, kad kiekvienas skrybėlių priskyrimas džentelmenams yra vienodai galimas, nors, formaliai kalbant, galimi ir kitokie tikimybiniai modelai. Taigi, sunumeravus ir ponus, ir jų skrybėles, kiekvieną skrybėlių paskirstymą aprašo n eilės keitiniai. Naudojantis ankstesniais žymenimis, gauname, kad ieškomoji tikimybė lygi $\nu_n(k_1(\sigma)=k)$, t.y. dažniui keitinių, turinčių lygiai k vienetinio ilgio ciklų. Taigi, pagal 1 Gončarovo teoremą gauname ieškomą ribą $e^{-1}\frac{1}{k!}$. $\diamond$

Naudodami įdėties ir atimties principą, įrodykite, kad

$$\nu_n(k_1(\sigma) = k) = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{(-1)^s}{s!}.$$

Pirmosios teoremos tvirtinimą galima sustiprinti, įrodant baigtiniamačių skirstinių momentų konvergavimą. Kadangi Poisson'o dėsniui patogiau naudoti *faktorialinius momentus*, tai prisiminsime keletą sąvokų. A.d. ξ r-os eilės faktorialiniu momentu vadinamas vidurkis $\mathbf{E}(\xi_{(r)})$, čia $x_{(r)} = x(x-1)\dots(x-r+1)$, $r \geq 1$. Žinomi sąryšiai

$$x_{(r)} = \sum_{j=0}^{r} s(r,j)x^j$$

bei

$$x^r = \sum_{j=0}^{r} S(r,j)x_{(j)},$$

kuriuose $s(r,j)$ ir $S(r,j)$, $0 \leq j \leq r$, – pirmosios ir antrosios rūšies Stirlingo skaičiai, $s(r,0) = S(r,0) = 0$, rodo, kad a.d. turi r-os eilės momentą tada ir tik tada, kai jis turi tos pačios eilės faktorialinį momentą. Panašiai, $\mathbf{E}(\xi_n^r) \to \mathbf{E}(\xi^r)$ tada ir tik tada, jei konverguoja ir atitinkama faktorialinių momentų seka. Pastebėkime, kad Poisson'o a.d. ξ su parametru λ r-asis faktorialinis momentas lygus

$$\mathbf{E}(\xi_{(r)}) = \left(e^{\lambda(z-1)}\right)^{(r)}\bigg|_{z=1} = \lambda^r.$$

2 teorema. *Tarkime, $r_1, \dots, r_l \geq 0$, $m = 1r_1 + \dots + lr_l$ ir $l \leq n$. Tada keitinių ansambliui*

$$E_{nm} := \mathbf{E}_n\Big(k_1(\sigma)_{(r_1)} \cdots k_l(\sigma)_{(r_l)}\Big) = \mathbf{1}(m \leq n) \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{j^{r_j}} = \mathbf{1}(m \leq n) \prod_{j=1}^{l} \mathbf{E}(\xi_{j(r_j)}).$$

Įrodymas. Kai $m > n \geq l$, vienas iš skirtumų $(k_j(\sigma) - s)$, $s \leq r_j$ lygus nuliui, todėl $E_{nm} = 0$, ir indikatorius $\mathbf{1}(m \leq n) = 0$. Tegu toliau $m \leq n$. Iš 3 lemos išvados išplaukia lygybė

$$\mathbf{E}_x\Big(\prod_{j=1}^{l} \xi_{j(r_j)}\Big) = (1-x)\sum_{n\geq 0} E_{nm}x^n, \qquad x < 1.$$

Čia kairėje pusėje esančio a.d. ξ_j parametras yra lygus x^j/j. Pasinaudoję a.d. nepriklausomumu, gauname

$$\Big(\prod_{j=1}^{l} \frac{1}{j^{r_j}}\Big) x^m (1 + x + \cdots) = \sum_{n\geq 0} E_{nm}x^n,$$

kai $x < 1$. Sulyginę koeficientus prie x^n, baigiame 2 teoremos įrodymą. $\diamond$

Panagrinėsime ciklų skaičiaus atsitiktiniame keitinyje asimptotinį skirstinį. Tegu

$$w(\sigma) = k_1(\sigma) + \cdots + k_n(\sigma) \quad -$$

šis skaičius. Remsimės Eulerio gama funkcijos $\Gamma(z)$ savybėmis. Pagal apibrėžimą

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt, \quad z \in \mathbf{C},\ \Re z > 0.$$

Lema. *Funkcija* $\Gamma(z)$ *yra analizinė, išskyrus paprastus polius taškuose* $z = 0, 1, \ldots;$
$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z);$
$\binom{z+n-1}{n} = \frac{\Gamma(n+z)}{\Gamma(z)\Gamma(n+1)};$
$\frac{\Gamma(n+z)}{n!} = n^{z-1}\big(1 + O(n^{-1})\big), \quad |z| \le C,\ n > C > 0.$
Įrodymas. $\diamond$

2 (Gončarovo) teorema.

$$\nu_n(x) = \nu_n(w(\sigma) - \log n < x\sqrt{\log n}) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}\, du.$$

Įrodymas. Kaip ir 1 teoremos įrodyme nagrinėsime skirstinio $\nu_n(x)$ charakteristinę funkciją

$$\psi_n(t) := e^{-it\sqrt{\log n}} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} e^{itw(\sigma)/\sqrt{\log n}} =: e^{-it\sqrt{\log n}} \varphi_(t/\sqrt{\log n}).$$

Pasinaudosime 2 lemos išvada, kai $\Phi : \mathbf{Z}^{+\infty} \to \mathbf{C}$ yra toks funkcionalas:

$$\Phi(\bar{k}) = \exp\{itk_1 + itk_2 + \cdots\}.$$

Dabar

$$\mathbf{E}_x(\Phi(\bar{\xi}) = \prod_{j\ge1} \mathbf{E}_x e^{it\xi_j} = \prod_{j\ge1} \exp\Big\{\frac{x^j}{j}(e^{it} - 1)\Big\} = (1-x)^{e^{it}-1}, \quad t \in \mathbf{R},\ 0 < x < 1.$$

Pagal 2 lemą gauname

$$\sum_{n\ge0} \mathbf{E}_n(\Phi(\bar{k}(\sigma))x^n = (1-x)^{e^{it}} = \sum_{n\ge0} \binom{e^{it} + n - 1}{n} z^n.$$

Taigi,

$$\varphi_n(t) = \mathbf{E}_n(\Phi(\bar{k}(\sigma)) = \binom{e^{it} + n - 1}{n} = \frac{\Gamma(n + e^{it})}{\Gamma(e^{it})n!}.$$

Iš šio skyrelio lemos gauname

$$\frac{\Gamma(n+e^{it})}{n!} = n^{e^{it}-1}\big(1+O(n^{-1})\big)$$

tolygiai $t \in \mathbf{R}$ atžvilgiu. Pakeisdami t dydžiu $t/\sqrt{\log n}$, pasinaudosime įverčiu

$$\Gamma(e^{it/\sqrt{\log n}}) = \Gamma(1+o(1)) = 1+o(1),$$

kai $n \to \infty$. Be to, iš nelygybės $|e^{iu} - 1 - iu + u^2/2| \leq |u|^3/6, \ u \in \mathbf{R}$ išplaukia

$$e^{-it\sqrt{\log n}} n^{e^{it/\sqrt{\log n}}-1} = \exp\big\{-t^2/2 + O((\log n)^{-1/2})\big\}$$

tolygiai srityje $|t| \leq T$, čia $T > 0$ – bet koks fiksuotas skaičius. Įstatę gautuosius įverčius į charakteristinės funkcijos išraišką, gauname

$$\psi_n(t) = \exp\big\{-t^2/2\big\}(1+o(1)),$$

kai $n \to \infty$, tolygiai $|t| \leq T$ atvilgiu. Kadangi toks charakteristinių funkcijų konvergavimas yra ekvivalentus skirstinių silpnajam konvergavimui, teorema yra įrodyta. $\diamond$

Užduotis. Kaip skaičiuotumėte atsitiktinio keitinio maksimalaus ciklo ilgio vidurkį, kitus momentus?

12. Analizinis metodas

9 skyrelio 3 lemos rezultatą galima panaudoti ir analizinio metodo pagrindimui. Nagrinėkime bendrą ansamblių klasę su generuojančia funkcija

$$Z(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{p(n)}{n!} x^n = \exp\left\{\sum_{j\geq 1} \frac{m_j}{j!} x^j\right\}.$$

Anksčiau turėtas parametras x_0 nusako laipsninės eilutės, esančios po eksponente, konvergavimo intervalą. Be to, kai $x < x_0$, apibrėžtas a.d.

$$\zeta = \sum_{j\geq 1} j\xi_j.$$

Čia ξ_j – nepriklausomi Poisson'o a.d. su vidurkiais $m_j x^j/j!$, $j \geq 1$. Pastebėkime, kad tikimybė $P(\zeta = n)$ lygi funkcijos

$$\prod_{j\geq 1} \exp\left\{\frac{m_j x^j}{j!}(z^j - 1)\right\} = \frac{Z(zx)}{Z(x)}$$

Taylor'o koeficientui prie z^n. Todėl

$$P(\zeta = n) = \frac{1}{Z(x)} \frac{p(n)x^n}{n!}$$

ir

$$Z(x)\mathbf{E}_x(\Phi(\bar{\zeta})) = \sum_{n\geq 0} \mathbf{E}_n(\Phi(\bar{k}(\sigma)))\frac{p(n)}{n!}x^n, \tag{1}$$

jei $\mathbf{E}(\Phi(\bar{\zeta}))$ yra apibrėžtas ir $x < x_0$. Tarkime, kad pagal analizinio pratęsimo principą (1) lygybėje esančias eilutes galima pratęsti skritulyje $|x+iy| < x_0$. Apskaičiavus kairėje esančias funkcijas, reikalingo dydžio $\mathbf{E}_n(\Phi(\bar{k}(\sigma)))$ asimptotikos galima ieškoti naudojant Cauchy formulę analizinėms funkcijoms. Tikimybinė interpretacija, naudota išvedant (1) lygybę toliau darosi nebereikalinga.

Pavyzdžiui, atsitiktinio ansamblio komponenčių kiekiui $w(\sigma)$ tirti gali būti panaudota formulė

$$Z(x+iy)^{e^{it}} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{p(n)}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}} e^{itw(\sigma)}\right)\frac{p(n)}{n!}(x+iy)^n, \qquad |x+iy| < x_0, \quad t\in\mathbf{R}.$$

13. Felerio poravimas

Atsitiktinių dydžių $k_j(\sigma),\ j \leq n$, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $\{\mathbf{S}_n, 2^{\mathbf{S}_n}, \nu_n\}$, priklausomumas sukelia nemaža sunkumų, todėl kyla natūralus klausimas, ar negalima juos išreikšti kitos erdvės nepriklausomų atsitiktinių dydžių kombinacijomis. Yra keletas būdų realizuoti šią idėją. Jie vadinami *poravimais*, nes vienoje tikimybinėje erdvėje apibrėžiami ir nepriklausomi, ir priklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys mus dominančių dydžių skirstinius . Aprašysime W.Feller'io metodą.

Pradžioje modeliuojame atsitiktinį keitinį σ, naudodami nepriklausomus Bernulio a.d. $\eta_j,\ j\geq 1$, apibrėžtus kurioje nors erdvėje $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ tikimybėmis

$$P(\eta_j = 1) = \frac{1}{j} = 1 - P(\eta_j = 0).$$

Be to, tariame, jog turime galimybę iš baigtinės aibės skaičių išrinkti atstovą su vienoda tikimybe ir nepriklausomai nuo dydžių η_j.

Štai Feller'io algoritmas:

Startas: Atidarome ciklą vienetu ir rašome

$$(1$$

1 žingsnis: Jei $\eta_n = 1$, tai uždarome pradėtą ciklą, 2 pradedame naują ir rašome

$$(1)(2$$

jei $\eta_n = 0$, tai prie 1 pradėtame cikle prirašome i, imdami jį su vienoda tikimybe iš skaičių $\{2,\dots,n\}$, ir gauname

$$(1i$$

2 žingsnis: Jei $\eta_{n-1} = 1$, tai uždarome pradėtą ciklą, mažiausiu iš nepanaudotų skaičių pradedame naują ciklą ir gauname

$$(1)(2)(3 \text{ arba } (1i)(l,$$

čia $l = \min\{1, \ldots, n\} \setminus \{1, i\}$;
jei $\eta_{n-1} = 0$, tai pradėtame cikle prirašome vieną iš likusių skaičių, imdami jį su vienoda tikimybe, ir gauname

$$(1)(2j \quad \text{arba} \quad (1im,$$

čia $j \in \{3, \ldots, n\}$, o $m \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{1, i\}$.

Atlikę k žingsnį, toliau naudojame a.d. η_{n-k}.

$(k+1)$ **žingsnis:** Jei $\eta_{n-k} = 1$, tai uždarome pradėtąjį ciklą ir mažiausiu nepanaudotu skaičiumi pradedame naują ciklą,
jei $\eta_{n-k} = 0$, tai atvirojo ciklo gale prirašome nepanaudotą skaičių, imdami jį su vienoda tikimybe.

Po n žingsnių procesas baigiasi pradėtojo ciklo uždarymu.

Skaičiuodami bet kurio iš baigtų ir pradėto ciklų varianto, gauto po kiekvieno žingsnio, tikimybes, įsitikiname, jog su tikimybe $1/n!$ sudarėme atsitiktinį keitinį, užrašytą ciklų sandauga.

2 teorema.

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j = \sum_{j=1}^{n} k_j(\sigma) = w(\sigma).$$

Įrodymas. Pakanka pastebėti, jog ciklas pabaigiamas tada ir tik tada, kai $\eta_j = 1$. $\diamond$

3 teorema.

$$k_j(\sigma) = X_{nj} := \eta_{n-j+1}(1 - \eta_{n-j+2}) \cdots (1 - \eta_n) + \\ + \sum_{i=1}^{n-j} \eta_i (1 - \eta_{i+1}) \cdots (1 - \eta_{i+j-1}) \eta_{i+j}.$$

Įrodymas. Pastebėkime, kad pirmasis j ilgio ciklas susidaro tada ir tik tada, kai $(\eta_n, \ldots, \eta_{n-j+1}) = (0, \ldots, 0, 1)$. Tai ekvivalentu lygybei

$$\eta_{n-j+1}(1 - \eta_{n-j+2}) \cdots (1 - \eta_n) = 1.$$

Vėliau toks ciklas susiformuoja tada ir tik tada, kada vektoriaus $(\eta_n, \ldots, \eta_1)$ reikšmių sekoje pasirodo grandinė $1, 0, \ldots, 0, 1$, kurioje tarp vienetų yra $j-1$ nulių. Suma pagal $i = 1, \ldots, n-j$, kuri užrašyta 3 teoremos formulavime, sudeda tiek vienetų, kiek yra minėtų grandinių, t.y., ji suskaičiuoja j ilgio ciklų kiekį, pradedant antruoju.
3 teorema įrodyta. $\diamond$

Nors 3 teoremoje įrodyta lygybė $k_j(\sigma) = X_{nj}$, turėdami omenyje erdvę $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, naudosime žymenį X_{nj}, o kalbėdami apie erdvę $\{\mathbf{S}_n, 2^{\mathbf{S}_n}, \nu_n\}$, – žymenį $k_j(\sigma)$.

4 teorema. *Pažymėkime*

$$X_j = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(1-\eta_{i+1})\cdots(1-\eta_{i+j-1})\eta_{i+j}.$$

Kai $n \to \infty$,

$$(X_{n1}, \dots, X_{nn}, 0 \dots,) \stackrel{P}{\Rightarrow} (X_1, X_2 \dots).$$

Įrodymas. Pradžioje pastebėkime, kad a.d. X_j yra apibrėžtas. Iš tiesų,

$$\sum_{i\geq 1} P\Big(\eta_i(1-\eta_{i+1})\cdots(1-\eta_{i+j-1})\eta_{i+j} \neq 0\Big) \leq$$
$$\leq \sum_{i\geq 1} P(\eta_i = 1, \eta_{i+j} = 1) = \sum_{j\geq 1} \frac{1}{i(i+j)} < \infty,$$

todėl pagal Borelio-Kantelio lemą begalinė a.d. eilutė konverguoja beveik visur (b.v.). Be to,

$$R_{nj} := \sum_{i>n-j} \eta_i(1-\eta_{i+1})\cdots(1-\eta_{i+j-1})\eta_{i+j} \to 0 \qquad b.v.$$

Toliau, jei

$$Q_{nj} := \eta_{n-j+1}(1-\eta_{n-j+2})\cdots(1-\eta_n),$$

tai

$$P(Q_{nj} = 1) \leq P(\eta_{n-j+1} = 1) = 1/(n-j+1) \to 0,$$

visiems j, kai $n \to \infty$.

Kadangi $|X_j - X_{nj}| \leq R_{nj} + Q_{nj}$, gauname bet kokio fiksuoto baigtinio skaičiaus a.d. X_{nj} jungtinių skirstinių konvergavimą į atitinkamus $(X_1, X_2, \dots)$ baigtiniamačius skirstinius.

4 teorema įrodyta. ◇

Išvada. $(X_1, X_2 \dots) \stackrel{d}{=} (\xi_1, \xi_2, \dots)$. *Čia kaip ir anksčiau,* ξ_j, $j \geq 1$ *– nepriklausomi Poisson'o a.d. su parametrais* $1/j$ *atitinkamai.*

Įrodymas. Pakanka sugretinti turėtus sąryšius

$$(k_1(\sigma), \dots, k_n(\sigma), 0 \dots) \stackrel{\nu_n}{\Rightarrow} (\xi_1, \xi_2, \dots),$$

$$(k_1(\sigma), \dots, k_n(\sigma), 0 \dots) \stackrel{d}{=} (X_{n1}, \dots, X_{nn}, 0 \dots,)$$

bei 4 teoremos teiginį. ◇

14. Atstumo pagal varijaciją įvertinimas.

Atstumas d pagal (pilnąją) varijaciją tarp dviejų atsitiktinių elementų X ir Y su reikšmėmis bendroje metrinėje erdvėje S, kurios Borelio aibių klasė yra $\mathcal{S}$, skirstinių $\mathcal{L}(X)$ ir $\mathcal{L}(Y)$ yra apibrėžiamas taip:

$$d(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) := \sup_{B\in\mathcal{S}} |P_1(X \in B) - P_2(Y \in B)| = \sup_{B\in\mathcal{S}} (P_1(X \in B) - P_2(Y \in B)).$$

Įsisitinkite, kad antroji lygybė yra teisinga! Kai dydžiai yra diskretūs, pvz., $S = \mathbf{Z}^{+^n}$, galima ir kitokia šio atstumo išraiška. Tegu $a^+ = a$, jei $a \geq 0$, ir $a^+ = 0$, jei $a < 0$. Be to, tegu $a^- = a - a^+$. Tada tokiems dydžiams

$$d(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) := \sum_{s\in S} \big(P_1(X = s) - P_2(Y = s)\big)^+$$

ir

$$d(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) := \sum_{s\in S} \big(P_1(X = s) - P_2(Y = s)\big)^-$$

Kadangi $|a| = a^+ + a^-$, iš čia išplaukia lygybė

$$d(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) := \frac{1}{2} \sum_{s\in S} \big|P_1(X = s) - P_2(Y = s)\big|.$$

Ateityje mes naudosimės vektorių

$$\bar{k}_r(\sigma) := (k_1(\sigma), \dots, k_r(\sigma))$$

ir

$$\bar{\xi}_r := (\xi_1, \dots, \xi_r)$$

skirstinių $\mathcal{L}(\bar{k}_r(\sigma))$ ir $\mathcal{L}(\bar{\xi}_r)$ atstumo pagal varijaciją, t. y., dydžio

$$\begin{aligned} d_r(n) &:= \sup_{A\subset\mathbf{Z}^{+^r}} \Big|\nu_n(\bar{k}_r(\sigma) \in A) - P(\bar{\xi}_r \in A)\Big| = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\bar{k}_r\in\mathbf{Z}^{+^r}} \big|\nu_n(\bar{k}_r(\sigma) = \bar{k}_r) - P(\bar{\xi}_r = \bar{k}_r)\big| \end{aligned}$$

įvertiniu, kai $r = r(n) \leq \varepsilon n$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$.

1 lema.

$$d_r(n) \leq \sum_{j\leq r} \mathbf{E}|X_{nj} - X_j| =: d_r^w(n)$$

Įrodymas. Pažymėkime $\bar{X}_{nr} = (X_{n1}, \ldots, X_{nr})$. Pagal 11 skyrelio 3 lemą jo skirstinys sutampa su vektoriaus $\bar{k}_r(\sigma)$ skirstiniu. Taip pat pagal 11.3 lemos išvadą $\bar{\xi}_r$ galime pakeisti $\bar{X}_r := (X_1, \ldots, X_r)$. Todėl

$$d_r(n) = \sup_{A\subset \mathbf{Z}^{+r}} \left| P(\bar{X}_{nr} \in A) - P(\bar{X}_r \in A) \right| \le P(\bar{X}_{nr} \ne \bar{X}_r) \le$$
$$\le P\biggl(\sum_{j\le r} |X_{nj} - X_j| \ge 1 \biggr) \le d_r^w(n).$$

1 lema įrodyta.

1 teorema (Fundamentalioji lema). *Jei $r \le n$, tai*

$$d_r(n) \le \frac{2r}{n-r+1}.$$

Įrodymas. Pagal 1 lemą pakanka tokį įvertį gauti metrikai $d_r^w(n)$. Vertinme a.d.

$$X_j - X_{nj} = R_{nj} - Q_{nj} = \sum_{i>n-j} \eta_i(1-\eta_{i+1})\cdots(1-\eta_{i+j-1})\eta_{i+j} -$$
$$- \eta_{n-j+1}(1-\eta_{n-j+2})\cdots(1-\eta_n)$$

pirmąjį absoliutinį momentą. Remdamiesi a.d. η_j nepriklausomumu, praleisdami dalį daugiklių, gauname

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|X_j - X_{nj}| &\le \sum_{l>n-j} \frac{1}{l(l+j)} + \frac{1}{n-j+1} = \\
&= \frac{1}{j} \sum_{l>n-j} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+j} \right) + \frac{1}{n-j+1} = \\
&= \frac{1}{j} \sum_{n-j<l\le n} \frac{1}{l} + \frac{1}{n-j+1} \le \\
&\le \frac{1}{n-j+1} + \frac{1}{n-j+1} \le \frac{2}{n-r+1},
\end{aligned}$$

jei $j \le r$. Sudėję pagal šiuos j, baigiame teoremos įrodymą.

Atidžiau vertinant momentus, galime patikslinti 1 teoremoje gautą nelygybę.

2 teorema. *Tegu $n \to \infty$. $d_r(n) = o(1)$ tada ir tik tada, kai $r = o(n)$.*

Įrodymas. Sąlygos $r = o(n)$ pakankamumas išplaukia iš 1 teoremos.
Būtinumui įrodyti naudosimės išraiška

$$d_r(n) = \sup_{A\subset \mathbf{Z}^{+r}} \left| \nu_n(\bar{k}_r(\sigma) \in A) - P(\bar{\xi}_r \in A) \right| =$$
$$= \sup_{A\subset \mathbf{Z}^{+r}} \left| P(\bar{\xi}_r \in A|\, \zeta = n) - P(\bar{\xi}_r \in A) \right|.$$

Čia, kaip ir anksčiau $\zeta = 1\xi_1 + \cdots + n\xi_n$. Parinkime "blogą" aibę $A \subset \mathbf{Z}^{+r}$. Ja gali būti aibė

$$\{\bar{k}_r \in \mathbf{Z}^{+r} :\ 1k_1 + \cdots + rk_r > n\}.$$

Kadangi sąlyginė tikimybė lygi nuliui, gauname

$$d_r(n) \geq P\biggl(\sum_{j\leq r} j\xi_j > n\biggr) \geq P\biggl(\frac{r}{2}\sum_{r/2<j\leq r} \xi_j > n\biggr) = P(Y > 2n/r).$$

Čia Y – Poisson'o a.d. su parametru

$$\sum_{r/2<j\leq r} 1/j \sim \log 2, \quad r \to \infty.$$

Jei $r = 2\varepsilon n$, tai

$$P(Y > \varepsilon^{-1}) \geq c(\varepsilon) > 0.$$

2 teorema įrodyta.

15. Sąlyginių tikimybių įverčiai

Vertinsime iš viršaus sąlygines tikimybes per besąlygines šiek tiek išplėsdami nagrinėjamus įvykius. Paprastumo dėlei naudosime geometrinę tikimybinės erdvės interpretaciją, persikeldami į anksčiau turėtų a.d. reikšmių erdvę.

Tegu dabar $\Omega = \mathbf{Z}^{+n}$ – aibė vektorių $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ su neneigiamomis koordinatėmis ir $\bar{e}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, čia 1 yra j-oje pozicijoje, $j = 1, \ldots, n$. Žymėsime $\bar{k}' \perp \bar{k}''$, jei $k_1'k_1'' + \cdots + k_n'k_n'' = 0$ ir $\bar{k}' \leq \bar{k}''$, jei $k_1' \leq k_1'',\ \cdots,\ k_n' \leq k_n''$. Čia $\bar{k}' = (k_1', \ldots, k_n')$ ir $\bar{k}'' = (k_1'', \ldots, k_n'')$. Žymuo $\bar{k}' \parallel \bar{k}''$ reikš, kad $\bar{k}' \leq \bar{k}''$ ir $\bar{k}' \perp \bar{k}'' - \bar{k}'$.

Tarkime, kad aibėje Ω apibrėžtas tikimybinis erdvių sandaugos matas

$$P(\bar{k}) := P(\{\bar{k}\}) = \prod_{j=1}^{n} p_j(k_j), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} p_j(k) = 1,$$

čia $0 \leq p_j(k) \leq 1$, kai $1 \leq j \leq n,\ k \geq 0$.

Tegu $L : \Omega \to \mathbf{Z}^+$ - funkcija, turinti pavidalą $L(\bar{k}) = 1k_1 + \cdots + nk_n$ ir $\Omega_m = L^{-1}(m) = \{\bar{k} :\ L(\bar{k}) = m\}$. Tolimesniems mūsų taikymams svarbūs tikimybių

$$P(\{\bar{k} :\ H(\bar{k}) \in B\}\ |\Omega_n)$$

įverčiai. Čia $H : \Omega \to \mathbf{G}$ - adityvioji funkcija. Ją galima apibrėžti lygybėmis

$$H(\bar{k}) = \sum_{j=1}^{n} H_j(k_j),$$

kuriose $H_j(k_j) \in \mathbf{G}$, o $(\mathbf{G}, +)$ yra adicinė Abelio grupė, $H_j(0) = 0$. Žinoma, įdomiausias atvejis $P_n := P(\Omega_n) = o(1)$, kai $n \to \infty$.

Bet kokiam poaibiui $U \subset \Omega$ apibrėžiame jo plėtinį

$$V = V(U) := \{\bar{k} = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 - \bar{k}_3 : \ \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3 \in U, \ \bar{k}_1 \perp \bar{k}_2 - \bar{k}_3, \ \bar{k}_3 \parallel \bar{k}_2\}$$

bei jo papildinį $\bar{U} = \Omega \setminus U$.

Šio skyrelio pagrindinis rezultatas yra tokia teorema.

1 teorema. *Tegu $n \geq 1$ ir c, c_1, C_1 ir C_2 tokios teigiamos konstantos, kad*

(i) $p_j(0) \geq c$ *visiems* $1 \leq j \leq n$;

(ii) $P(\Omega_m) \leq C_1 P_n$ *visiems* $0 \leq m \leq n-1$;

(iii) $P_n \geq c_1 n^{-1}$;

(iv)

$$\sum_{\substack{k \geq 1, j \leq n \\ kj = m}} \frac{p_j(k)}{p_j(0)} \leq \frac{C_2}{m}$$

visiems $1 \leq m \leq n$.

Tada

$$P(\bar{V} \mid \Omega_n) \leq C P(\bar{U}).$$

Čia $C > 0$ ir priklauso tik nuo sąlygose įvestų konstantų.

1 teoremos įrodymą pradėsime lema. Joje naudojama tik sąlyga (i).

Lema. *Pažymėkime $\pi = k\bar{e}_j$ su bet kokiais $k \geq 1$ ir $j \leq n$, $q(\pi) = p_j(k)/p_j(0)$,*

$$Q_n = \{\pi : \ L(\pi) \leq n\},$$

$$Q' = \{\pi \in Q_n : \ \exists \bar{k} \in U, \bar{k} \perp \pi, \pi + \bar{k} \in U\}$$

ir $Q'' = Q_n \setminus Q'$. Jei $P(\bar{U}) := \mu < c^2/32$, tai

$$\sum_{\pi \in Q''} q(\pi) \leq 4c^{-1}\mu.$$

Įrodymas. Imkime $\pi = k\bar{e}_j$ iš aibės Q'' su kažkokiais $k \geq 1$ ir $j \leq n$ ir apibrėžkime aibę

$$W_\pi = \{\bar{l} = \pi + \bar{k} : \ \bar{k} \in U, \bar{k} \perp \pi\} \subset \bar{U}.$$

Jei $\pi \in Q$, o $\bar{k} \in \Omega$ tokie, kad $\pi \perp \bar{k}$, tai

$$P(\pi + \bar{k}) = q(\pi) P(\bar{k}). \tag{1}$$

Vadinasi,

$$\mu \geq P(W_\pi) = q(\pi) \sum_{\bar{k} \in U, \bar{k} \perp \pi} P(\bar{k}) \geq q(\pi) \Bigg(\sum_{\bar{k} \in U} P(\bar{k}) - \sum_{\substack{\bar{k} \in \Omega \\ k_j \geq 1}} P(\bar{k}) \Bigg) = \tag{2}$$

$$= q(\pi) \Big(1 - \mu - (1 - p_j(0)) \Big) \geq q(\pi) c/2$$

ir

$$q(\pi) \leq 2c^{-1} \mu \leq c/8. \tag{3}$$

Jei $\pi_1 = r\bar{e}_i \neq \pi$, $\pi_1 \in Q''$, tai $W_\pi \cap W_{\pi_1} = \emptyset$, kai $i = j$, ir

$$W_\pi \cap W_{\pi_1} \subset \{ \bar{l} = \pi + \pi_1 + \bar{k} : \ \bar{k} \in \Omega, \bar{k} \perp \pi, \bar{k} \perp \pi_1 \}$$

kai $i \neq j$. Todėl bet kuriuo atveju iš (1) gauname

$$P(W_\pi \cap W_{\pi_1}) \leq q(\pi) q(\pi_1). \tag{4}$$

Bet kokiam poaibiui $Q \subset Q''$ pažymėkime

$$W = \bigcup_{\pi \in Q} W_\pi, \quad a := a(Q) = \sum_{\pi \in Q} q(\pi).$$

Kadangi $W \subset \bar{U}$, tai iš (2) ir (4) nelygybių gauname

$$\mu \geq P(W) \geq \sum_{\pi \in Q} P(W_\pi) - \sum_{\pi, \pi_1 \in Q} P(W_\pi \cap W_{\pi_1}) \geq a(\frac{c}{2} - a) \geq \frac{ca}{4}, \tag{5}$$

jei $a \leq c/4$. Vadinasi, jei $a(Q'') \leq c/4$, tai paėmę $Q = Q''$, baigiame lemos įrodymą.

Tegu priešingai, $a(Q'') > c/4$. Parenkame Q taip, kad ji būtų maksimalus Q'' poaibis, patenkinantis sąlygą $a(Q) \leq c/4$. Po to iš netuščios aibės $Q \setminus Q''$ imame elementą π'. Pagal mūsų parinkimą $q(\pi') + a(Q) > c/4$, todėl iš (5) bei (3) gauname

$$\mu \geq \frac{ca(Q)}{4} > \frac{c}{4} \left(\frac{c}{4} - q(\pi') \right) \geq \frac{c^2}{32}.$$

Tai prieštarauja lemos sąlygai. Vadinasi, prielaida $a(Q'') > c/4$ buvo neteisinga.

Lema įrodyta.

1 teoremos įrodymas. Galima nagrinėti atvejį, kai $\mu = P(\bar{U}) \leq c^2/32$. Pastebėkime, jog $\bar{l} \in \bar{V} \cap \Omega_n$ yra nenulinis vektorius. Vadinasi, jį galime užrašyti $\bar{l} = \pi + \bar{k}$ su kažkokiu $\pi = ke_j$, $1 \leq L(\pi) = kj \leq n$ ir tokiu, kad $\pi \perp \bar{k}$. Turime $L(\pi + \bar{k}) = L(\pi) + L(\bar{k}) = n$. Dar daugiau, $\pi \in Q''$ arba $\bar{k} \in \bar{U}$. Iš tiesų, priešingu atveju pagal Q' apibrėžimą egzistuotų toks vektorius $\bar{k}_1 \in U$, kad $\bar{k}_1 \perp \pi$, $\pi + \bar{k}_1 \in U$ ir

$$\bar{l} = \bar{k} + (\pi + \bar{k}_1) - \bar{k}_1 \in V.$$

Todėl turėdami omenyje ankstesnius apibrėžimus, lygybę

$$\sum_{\pi \| \bar{l}} L(\pi) = n,$$

kai $\bar{l} \in \Omega_n$, bei (1), gauname

$$(6) \qquad P_n P(\bar{V} \,|\Omega_n) = \frac{1}{n} \sum_{\bar{l} \in \bar{V} \cap \Omega_n} P(\bar{l}) \sum_{\pi \| \bar{l}} L(\pi) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{\pi + \bar{k} \in \bar{V} \cap \Omega_n \\ \pi \perp \bar{k}}} q(\pi) L(\pi) P(\bar{k}) \leq$$
$$\leq \sum_{\pi \in Q''} q(\pi) \sum_{L(\bar{k}) = n - L(\pi)} P(\bar{k}) + \frac{1}{n} \sum_{\bar{k} \in \bar{U}} P(\bar{k})(n - L(\bar{k})) \sum_{L(\pi) = n - L(\bar{k})} q(\pi)$$
$$=: \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Pagal teoremos sąlygas ir lemą turime

$$\Sigma_1 = \sum_{\pi \in Q''} q(\pi) P(\Omega_{n - L(\pi)}) \leq \frac{C_1}{4c} P_n \mu$$

ir

$$\Sigma_2 \leq \frac{C_2}{n} \mu \leq \frac{C_2}{c_1} P_n \mu.$$

Įstatę paskutinius du įverčius į (6), baigiame 1 teoremos įrodymą.

2 teorema. *1 teoremos tvirtinimas yra teisingas nepriklausomiems Poisson'o a.d.* ξ_j *su parametrais* $1/j$, $1 \leq j \leq n$.

Įrodymas. Patikriname (i)-(iv) sąlygas. Kadangi dabar

$$p_j(k) = \exp\{-\frac{1}{j}\} \frac{1}{j^k \, k!},$$

tai (i) sąlyga yra patenkinta su $c = e^{-1}$. Iš lygybės $L(\bar{k}) = 1k_1 + \cdots + nk_n = m \leq n$ išplaukia $k_j = 0$, kai $m + 1 < j \leq n$. Todėl Cauchy formulė

$$\sum_{L(\bar{k}) = m} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{k_j} k_j!} = 1$$

duoda įvertį

$$P(\Omega_m) = P_n = \exp\left\{ -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \right\} \geq e^{-1} n^{-1}$$

visiems $0 \leq m \leq n$. Vadinasi, (ii) ir (iii) galioja su $C_1 = 1$ bei $c_1 = e^{-1}$. Pagaliau,

$$\sum_{jk=m} \frac{1}{j^k k!} \leq \frac{2}{m} + \frac{1}{m} \sum_{\substack{k|m \\ 2 \leq k \leq m/2}} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{k}{m} \right)^{k-1} \leq \frac{4}{m},$$

ir (iv) sąlygoje galime imti $C_2 = 4$.

Taigi, 2 teorema išplaukia iš 1 teoremos.

Mums reikalinga išvada.

3 teorema. *Jei* $h : \mathbf{S}_n \to \mathbf{G}$ *- adityvioji funkcija, apibrėžta naudojant dvigubą seką iš adicinės Abelio grupės* $\mathbf{G}$ *elementų* $h_j(k)$, $h_j(0) = 0$, *tai bet kokiam poaibiui* $A \subset \mathbf{G}$

$$\nu_n\Big(h(\sigma) \notin A + A - A \Big) \leq CP\Big(\sum_{j=1}^{n} h_j(\xi_j) \notin A \Big).$$

Įrodymas. Trumpumo dėlei pažymėkime

$$H(\bar{k}) = \sum_{j=1}^{n} h_j(k_j)$$

bei $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Pastebėkime, kad

$$H(\bar{l} + \bar{k}) = H(\bar{l}) + H(\bar{k}), \qquad \text{kai } \bar{l} \perp \bar{k},$$

ir iš čia

$$H(\bar{l} - \bar{k}) = H(\bar{l}) - H(\bar{k}), \qquad \text{kai } \bar{k} \parallel \bar{l}.$$

Anksčiau buvome išvedę lygybę

$$\nu_n\Big(h(\sigma) \notin A + A - A \Big) = P\Big(H(\bar{\xi}) \notin A + A - A |\, \zeta = n \Big).$$

Sąlyga $\zeta = n$ ekvivalenti 1 ir 2 teoremose naudotai sąlygai $\bar{\xi} \in \Omega_n$. Parinkime 2 teoremoje naudotą aibę $U = \{\bar{k} : \ H(\bar{k}) \in A)\}$ ir sudarykime plėtinį

$$V = V(U) = \big\{ \bar{k} = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 - \bar{k}_3 \in V : \quad \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3 \in U,\ \bar{k}_1 \perp \bar{k}_2 - \bar{k}_3, \bar{k}_3 \parallel k_2, \ \big\}.$$

Bet kuriam iš šių vektorių

$$H(\bar{k}) = H(\bar{k}_1) + H(\bar{k}_2 - \bar{k}_3) = H(\bar{k}_1) + H(\bar{k}_2) - H(\bar{k}_3) \in A + A - A.$$

Vadinasi,

$$H(\bar{k}) \notin A + A - A) \subset \{\bar{k} : \ \bar{k} \notin V\} = \bar{V}.$$

Matome, kad 3 teorema yra 2 teoremos išvada.

1 išvada. *Tarkime, kad $h : \mathbf{S}_n \to \mathbf{R}$ yra reali funkcija, apibrėžta simetrinėje grupėje. Bet kokiems $a \in \mathbf{R}$ ir $x \geq 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\nu_n\Big(|h(\sigma) - a| \geq x\Big) \leq CP\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n} h_j(\xi_j) - a\Big| \geq x/3\Big).$$

Įrodymas. 3 teoremoje paimkime $\mathbf{G} = \mathbf{R}$ ir $A = \{u : \ |u - a| < x/3\}$. Kadangi $u \in A + A - A$ turi išraišką $u = u_1 + u_2 - u_3$ su $|u_i - a| < x/3$, $i = 1, 2, 3$, tai $|u - a| < x$ ir $A + A - A \subset \{u : \ |u - a| < x\}$. Vadinasi,

$$\nu_n(|h(\sigma) - a| \geq x) \leq \nu_n(h(\sigma) \notin A + A - A).$$

Įrodymą baigiamę pritaikę 3 teoremą.

2 išvada. *Tarkime, kad $h : \mathbf{S}_n \to \mathbf{R}$ - reali adityvioji funkcija funkcija, apibrėžta simetrinėje grupėje. Pažymėkime*

$$A(n) = \sum_{kj \leq n} \frac{h_j(k)}{j^k k!}, \qquad B(n)^2 = \sum_{kj \leq n} \frac{h_j(k)^2}{j^k k!}.$$

Tada

$$D_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} (h(\sigma) - A(n))^2 \leq C_1 B(n)^2.$$

Žia C_1 - absoliuti teigiama konstanta.

Įrodymas. Pastebėkime, kad D_n yra skirstinio

$$\nu_n(x) := \nu_n(h(\sigma) - A(n) < x)$$

antrasis momentas. Todėl

$$D_n = 2\int_0^\infty x\nu_n(|h(\sigma) - A(n)| \geq x)\, dx.$$

Pritaikę 1 išvadą, gauname

$$D_n \leq 18C\mathbf{E}\Big(\sum_{j \leq n} h_j(\xi_j) - A(n)\Big)^2 \tag{1}$$

Dydžiui D_n reikšmės $h_j(k)$, kai $jk > n$, jokios įtakos neturi. Tad, jas laikome lygiomis nuliui. Naudodami Cauchy nelygybę, įvertiname

$$\Big|\sum_{j\le n}\mathbf{E}h_j(\xi_j) - A(n)\Big| \le \sum_{j\le n}|e^{-1/j}-1|\sum_{k\le n/j}\frac{|h_j(k)|}{j^k k!} \le$$

$$\le \sum_{jk\le n}\frac{|h_j(k)|}{j^{k+1}k!} \le B(n)\Big(\sum_{j,\,k\ge 1}\frac{1}{j^{k+1}k!}\Big)^{1/2} \le C_2B(n).$$

Dabar iš (1) ir nelygybės $(x+y)^2 \le 2x^2+2y^2,\ x,y\in\mathbf{R}$, išplaukia

$$D_n \le 36C\sum_{j\le n}\mathbf{E}h_j(\xi_j)^2 + 36CC_2^2B(n)^2 \le C_1B(n)^2.$$

2 išvada įrodyta.

Kitiems kombinatoriniams ansambliams šio skyrelio rezultatų analogai yra labiau komplikuoti.

16. Silpnasis didžiųjų skaičių dėsnis

Kada adityvių funkcijų seka $h_n : \mathbf{S}_n \to \mathbf{R}$ tenkina sąryšį

$$\nu_n(|h_n(\sigma) - \alpha(n)| \ge \varepsilon) = o(1), \tag{1}$$

kai $n\to\infty$, $\alpha(n)$ yra realių skaičių seka, o $\varepsilon > 0$ - bet koks fiksuotas skaičius? Tokie įverčiai paprastai vadinami didžiųjų skaičių dėsniais (silpnaisiais d.s.d.). Kadangi funkcijas h_n turi išraišką

$$h_n(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} h_{nj}(k_j(\sigma)),$$

čia $h_{nj}(k)$ - net trijų kintamųjų seka, $h_{nj}(0) = 0$, tai ir sąlygos turi išsireikšti per šią seką. Pastebėkime, jog visada galime imti $h_{nj}(k) = 0$, jei $j > n$ arba $k > n/j$. Iš tiesų, šios reikšmės nedalyvauja (1) dažniuose ir gali būti bet kaip pakeistos.

Sugretinkime mūsų uždavinį su atitinkama n.a.d. problema. Jei kaip ir anksčiau ξ_j, $j = 1, 2, ...$, - n.a.d., turintys Poisson'o skirstinius su parametrais $1/j$ atitinkamai, tai reikia nagrinėti tikimybes

$$P(\varepsilon) := P(|X_n - \alpha(n)| \ge \varepsilon),$$

kai $n\to\infty$. Pažymėkime $X_{nj} = h_{nj}(\xi_j)$.

1 lema. *A. dydžiai X_{nj}, $1 \le j \le n$, yra tolygiai nykstami tada ir tik tada, kai kiekvienam fiksuotam $j \ge 1$ ir $k \ge 1$ turime $h_{nj}(k) \to 0$.*

Įrodymas. Skaičiuojame

$$p_n := \max_{j\le n} P(|X_{nj}| \ge \varepsilon) = \max_{j\le n} \sum_{\substack{k\ge 1\\ |h_{nj}(k)|\ge\varepsilon}} e^{-1/j}\frac{1}{j^k k!}. \tag{2}$$

Tarkime $K \ge 1$ - bet koks fiksuotas skaičius. Jei $h_{nj}(k) \to 0$, tai ši savybė yra išlaikoma su visais $j \le K$ ir $k \le K$. Parinkime $n \ge n_0$ pakankamai didelį, kad $|h_{nj}(k)| < \varepsilon$ visiems šitiems indeksams. Taigi dideliems n galime nagrinėti tik tokius dėmenis, kai $j > K$ arba $k > K$. Vadinasi,

$$p_n \le \max_{K<j\le n} \sum_{k\ge 1} \frac{1}{j^k k!} + \max_{j\ge 1} \sum_{k>K} \frac{1}{j^k k!} = O(\frac{1}{K}),$$

jei $n \ge n_0$. Taigi, $P_n \to 0$, jei $n \to \infty$.

Atvirkščias tvirtinimas patikrinamas prieštaros būdu. Lema įrodyta.

Pažymėkime $u^* = \min\{|u|, 1\}\,\mathrm{sgn}$ bei $a_{nj} = h_{nj}(1)$.

2 lema. *Tarkime, kad $h_{nj}(k) \to 0$ kiekvienam fiksuotam $j \ge 1$ ir $k \ge 1$. Jei*

$$\sum_{j\le n} \frac{a_{nj}^{*^2}}{j} \to 0,$$

tai paėmę

$$\alpha(n) = A_1(n) := \sum_{\substack{j\le n\\ |a_{nj}|<1}} \frac{a_{nj}}{j},$$

gauname

$$P(|X_n - A_1(n)| \ge \delta) = o(1),$$

kai $n \to \infty$.

Įrodymas. Teiginys yra bendros n.a.d. sumavimo teorijos atitinkamos teoremos išvada. Pateiksime tik pora detalių.

Tegu $\hat{a} = a$, jei $|a| < 1$, ir $\hat{a} = 0$, jei $|a| \ge 1$. Pažymėkime

$$Y_n = \sum_{j\le n} \hat{X}_{nj} = \sum_{j\le n} \hat{h}_{nj}(\xi_j).$$

Nagrinėkime

$$P(\delta) := P(|X_n - Y_n| \ge \delta) \le P(\exists j:\ j \le n,\, X_{nj} \ne \hat{X}_{nj}) \le \sum_{j\le n} \sum_{\substack{k\le n/j\\ |h_{nj}(k)|\ge 1}} \frac{1}{j^k k!} \le$$

$$\le \sum_{\substack{j\le n\\ |a_{nj}|\ge 1}} \frac{1}{j} + \sum_{j\ge 1} \sum_{\substack{k\ge 2\\ |h_{nj}(k)|\ge 1}} \frac{1}{j^k k!} = o(1)$$

Pirmoji suma artėjo į nulį pagal lemos sąlygą, o antroji - dėl eilučių tolygaus konvergavimo atžvilgiu n.

Toliau įsitikiname, kad

$$\sum_{j\le n} \mathbf{E}\hat{X}_{nj} - A_1(n) = o(1).$$

Vadinasi centruojančią konstantų seką $A_1(n)$ galime pakeisti vidurkių suma. Toliau pritaikome Žebyšovo nelygybę. Gauname

$$P\left(\left|Y_n - \sum_{j\le n} \mathbf{E}\hat{X}_{nj}\right| \ge \delta\right) \le \delta^{-2} \sum_{j\le n} \mathbf{E}\hat{X}^2_{nj} \le \delta^{-2} \sum_{j\le n} \sum_{k\le n/j} \frac{\hat{h}_{nj}(k)^2}{j^k k!} = o(1),$$

kai n neaprėžtai didėja. Ir vėl pasinaudojome 2 lemos sąlyga bei tolygiu kartotinės eilutės konvergavimu n atžvilgiu.

2 lema įrodyta.

Atkreipkime dėmesį į vieną aplinkybę: jei $h_{nj}(k) \to 0$, tai ribinių teoremų sąlygose nepasirodo reikšmės $h_{nj}(k)$ su $k \ge 2$.

Teorema. *Tarkime, kad kiekvienam fiksuotam $j \ge 1$ ir $k \ge 1$ yra patenkinta sąlyga $h_{nj}(k) \to 0$. Jei*

$$\sum_{j\le n} \frac{a^{*^2}_{nj}}{j} \to 0,$$

tai su

$$\alpha(n) = A_1(n) = \sum_{\substack{j\le n\\ |a_{nj}|<1}} \frac{a_{nj}}{j},$$

dažniai

$$\nu_n(\delta) := \nu_n(|h_n(\sigma_) - A_1(n)| \ge \delta) = o(1),$$

kai $n \to \infty$. Žia $\delta > 0$ bet koks fiksuotas skaičius.

Įrodymas. Iš paskutinio skyrelio 1 išvados gauname

$$\nu_n(\delta) \le CP(\delta/3).$$

Todėl pagal 2 šio skyrelio lemą $\nu_n(\delta) = o(1)$, kai $n \to \infty$.

Teorema įrodyta.

17. Centrinė ribinė teorema

Kada adityvių funkcijų sekai $h_n : \mathbf{S}_n \to \mathbf{R}$ galioja centrinė ribinė teorema, t.y., kada

$$\nu_n(x) := \nu_n(h_n(\sigma) - \alpha(n) < x) \to \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du,$$

su kažkokia realių skaičių seka $\alpha(n)$? Žia ir vėliau ribinio perėjimo $n \to \infty$ nenurodinėsime.

Kaip ir 14 skyrelyje, palyginkime šį uždavinį su atitinkama n.a.d. problema. Tegu kaip ir anksčiau ξ_j, $j = 1, 2, ...,$ - n.a.d., turintys Poisson'o skirstinius su parametrais $1/j$ atitinkamai. Reikšmes $h_{nj}(k)$, kai $jk > n$ galime parinkti mums patogiu būdu. Kaip ir didžiųjų skaičių dėsnyje, net reikšmės, kai $k \geq 2$, esant nykstamumo sąlygai $h_{nj}(k) \to 0$, irgi neturės įtakos. Pasinaudokime bendra a.d. sumavimo teorija.

1 lema. *Tarkime Z_{nj}, $j \leq n$, n.a.d su skirstinių funkcijomis $F_{nj}(x)$, $W_n := X_{n1} + \cdots + X_{nn}$. Tam kad jie būtų tolygiai nykstami ir*

$$P(W_n - b_n < x) \to \Phi(x),$$

yra būtina ir pakankama, kad

(i)
$$\sum_{j \leq n} P(|X_{nj}| \geq \varepsilon) \to 0$$

kiekvienam $\varepsilon > 0$;

(ii)
$$\sum_{j \leq n} \left(\int_{|x|<1} x^2 \, dF_{nj}(x) - \left(\int_{|x|<1} x \, dF_{nj}(x) \right)^2 \right) \to 1;$$

(iii)
$$b_n = \sum_{j \leq n} \int_{|x|<1} x \, dF_{nj}(x) + o(1).$$

Mūsų atveju 1 lemos sąlygos suprastėja.

2 lema. *Tarkime $a_{nj} \to 0$ su kiekvienu fiksuotu $j \geq 1$. N.a.dydžiai $X_{nj} := a_{nj}\xi_j$ tenkina (i), (ii) ir (iii) sąlygas tada ir tik tada, kai*

(1)
$$\sum_{\substack{j \leq n \\ |a_{nj}| \geq \varepsilon}} \frac{1}{j} \to 0$$

kiekvienam $\varepsilon > 0$;

(2)
$$\sum_{\substack{j \leq n \\ |a_{nj}| < 1}} \frac{a_{nj}^2}{j} \to 1;$$

$$(3) \qquad b_n = \sum_{\substack{j\le n\\ |a_{nj}|<1}} \frac{a_{nj}}{j} + o(1).$$

Įrodymas. Salygų (i) ir (1) ekvivalentumą iš esmės jau esame nagrinėję 14 skyrelyje. Supaprastiname (ii) sąlygą. Kadangi dabar

$$\int_{|x|<1} x\, dF_{nj}(x) = \sum_{\substack{k\ge 1\\ |a_{nj}|k<1}} e^{-1/j}\frac{a_{nj}k}{j^k k!},$$

tai

$$(4) \qquad \sum_{j\le n}\Big(\int_{|x|<1} x\, dF_{nj}(x)\Big)^2 \le \sum_{\substack{j\le n\\ |a_{nj}|<1}} a_{nj}^2\Big(\sum_{k\ge 1} e^{-1/j}\frac{k}{j^k k!}\Big)^2 = \sum_{\substack{j\le n\\ |a_{nj}|<1}} \frac{a_{nj}^2}{j^2} = o(1).$$

Taigi atėminys (ii) sąlygoje gali būti praleistas. Skaičiuokime jos pirmąjį narį. Gauname, kad jis lygus

$$\sum_{\substack{j\le n\\ |a_nj|<1}} e^{-1/j}\frac{a_{nj}^2}{j} + \sum_{j\le n} e^{-1/j} \sum_{\substack{k\ge 2\\ |a_{nj}|k<1}} \frac{a_{nj}^2 k^2}{j}.$$

Pirmąjį dėmenį supaprastiname naudodami nelygybę $|e^{-1/j} - 1| \le 1/j$ ir (4) įvertį. Po to lieka įsitikinti, kad paskutinis dėmuo artėja į nulį. Susumavus pagal $k \ge 2$, matome, jog jis neviršija

$$\sum_{\substack{j\le n\\ |a_{nj}|<1}} \frac{a_{nj}^2}{j^2} = o(1).$$

Panašiai nagrinėjamas ir (3) bei (iii) ekvivalentumas.

2 lema įrodyta.

Trumpumo dėlei (1), (2) ir (3) sąlygas užrašykime kiek kitaip. Tegu

$$u^* = \min\{|u|, 1\}\operatorname{sgn} u.$$

3 lema. *2 lemos sąlygos yra ekvivalenčios tokioms sąlygoms:*

$$(A) \qquad \sum_{\substack{j\le n\\ a_{nj}<x}} \frac{{a_{nj}^*}^2}{j} \to \begin{cases} 1, & jei \quad x>0,\\ 0, & jei \quad x<0; \end{cases}$$

$$(B) \qquad b_n = \sum_{j\le n} \frac{a_{nj}^*}{j} + o(1).$$

Įrodymas yra trivialus.

4 lema. *Jei skirstiniai*

$$\nu_n(x) := \nu_n(h_n(\sigma) - \alpha(n) < x)$$

silpnai konverguoja į kažkokią skirsitinio funkciją $F(x)$ ir

$$(5) \qquad \nu_n(|g_n(\sigma) - h_n(\sigma)| \geq \varepsilon) \to 0,$$

tai ir $\nu_n(g_n(\sigma) - \alpha(n) < x)$ silpnai konverguoja į tą pačią funkciją $F(x)$.

Įrodymas. Žr. bendrąjį tikimybių teorijos kursą.

5 lema. *Jei $h_{nj}(k) \to 0$ fiksuotiems $j, k \geq 1$, $a_{nj} := h_{nj}(1)$, tai $h_n(\sigma)$ ir*

$$g_n(\sigma) := \sum_{j \leq n} a_{nj} k_j(\sigma)$$

patenkina (5) sąlygą.

Įrodymas. Skirtumas $h_n(\sigma) - g_n(\sigma)$ yra adityvioji funkcija, patenkinanti didžiųjų skaičių dėsnio sąlygas (Žr. 14 skyrelio teoremą).

5 lema įrodyta.

Funkcija $g_n(\sigma)$ yra visiškai adityvi. Vadinasi, pagal 4 lemą anksčiau suformuluotą centrinę ribinę problemą galima tirti tik tokioms funkcijoms. Toliau laikysime, kad h_n yra visiškai adityvių funkcijų seka, o $X_{nj} = a_{nj}\xi_j$.

Teorema. *Tegu $h_n(\sigma)$ - visiškai adityviųjų funkcijų seka, $h_{nj}(k) = a_{nj}k$ ir $a_{nj} \to 0$ kiekvienam $j \geq 1$. Jei*

$$(A) \sum_{\substack{j \leq n \\ a_{nj} < x}} \frac{{a^*_{nj}}^2}{j} \to \begin{cases} 1, & jei \quad x > 0, \\ 0, & jei \quad x < 0, \end{cases}$$

tai su

$$\alpha(n) = \sum_{j \leq n} \frac{a^*_{nj}}{j}$$

dažniai $\nu_n(h_n(\sigma) - \alpha(n) < x)$ konverguoja į standartinio normaliojo dėsnio skirstinį $\Phi(x)$.

Atvirkščiai, jei be to, kiekvienam $0 < \delta < 1$

$$(6) \qquad \sum_{\delta n < j \leq n} \frac{{a^*_{nj}}^2}{j} = o(1)$$

tai (A) sąlyga tokiam konvergavimui yra būtina.

Įrodymas. Pastebėkime, kad iš (A) išplaukia

$$\sum_{\substack{j\le n\\ |a_{nj}|\ge\varepsilon}} \frac{a_{nj}^{*^2}}{j} = o(1)$$

su kiekvienu $\varepsilon > 0$, todėl ir su kažkokiu $\varepsilon = \varepsilon(n) \to 0$. Dar daugiau iš jos išplaukia ir (6) sąlyga. Iš tiesų, fiksuokime $\delta < 1$ ir vertinkime

$$\sum_{\delta n < j \le n} \frac{a_{nj}^{*^2}}{j} \le \sum_{\substack{j\le n\\ |a_{nj}|\ge\varepsilon}} \frac{a_{nj}^{*^2}}{j} + \varepsilon \sum_{\delta n < j \le n} \frac{1}{j} = o(1) + O(\varepsilon(n)\log 1/\delta) = o(1).$$

Toliau taikome Fundamentaliąją lemą.....

18. Multiaibės struktūros vektoriaus asimptotinis skirstinys

Polinomų virš baigtinio kūno $\mathbf{F}_q^*[x]$ su vienetiniu vyriausiuoju koeficientu multiplikacinis pusgrupis nesudaro aukščiau nagrinėto ansamblio. Skaičiaus n adityvieji skaidiniai – irgi. Vienok, statistikų, apibrėžtų šiose struktūrose, tikimybinius uždavinius galime spręsti. Šios struktūrų klasės yra bendresnių struktūrų, *multiaibę*, pavyzdžiai. Apibrėžkime šią sąvoką.

Tarkime σ – n eilės kombinatorinė struktūra, susidedanti iš komponenčių, kurių eilės yra $1, 2, \ldots, n$ ir tokių komponenčių yra $k_1, k_2, \ldots, k_n$, atitinkamai. Žia $k_j = k_j(\sigma) \ge 0$ ir

$$1k_1 + \cdots + nk_n = n. \tag{1}$$

Komponentės gali būti ir vienodos. Kiek galėtume sudaryti tokių σ su struktūros vektoriumi $\bar{k}$, tenkinančiu (1) sąlygą? Tarkime, kad mes žinome visą j eilės komponenčių skaičių $1 \le \pi(j) < \infty$, iš kurių jos imamos su galimais pakartojimais. Tada jų sudarytume

$$N_n(\bar{k}) = \mathbf{1}(1k_1 + \cdots + nk_n) \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi(j) + k_j - 1}{k_j}.$$

Vadinasi, iš viso n eilės struktūrų, vadinamų multiaibėmis, gautume

$$p(n) := \sum_{\bar{k},\,(1)} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi(j) + k_j - 1}{k_j}.$$

Pavyzdžiai:

1) $F_q^*[x]$ atvejis: $p(n) = q^n$, o $\pi(j) = q^j/j + O(q^{j/2})$;

2) n adityviųjų skaidinių atvejis: $\pi(j) = 1$, $p(n)$ – Hardžio-Ramanudžano funkcija;

3) šakniniai nenumeruoti miškai, susidedantys iš šakninių medžių;

4) baigtinės aibės atvaizdžių modeliai, kurie gaunami iš visų atvaizdžių funkcinių digrafų praleidžiant viršūnių numeraciją ir sutapatinant izomorfiškus digrafus;

5) binarieji miškai, susidedantys iš binariųjų medžių.

Ne visuomet $\pi(j)$ ir $p(n)$ yra paprastų išraiškų. Kaip jas gauti?

1 teorema. *Tegu*

$$Z(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)t^n, \quad a(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi(j)t^j \quad -$$

multiaibių ir jų komponenčių generuojančios funkcijos. Jas riša lygybė

$$Z(t) = \prod_{j\geq 1}(1-t^j)^{-\pi(j)} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(t^k)}{k}\right\}.$$

Įrodymas. Žr. atitinkamos lemos $F_q^*[x]$ atveju įrodymą.

Atskirais atvejais yra ir daugiau sąryšių, kuriuos galima būtų panaudoti. Tikimybiniai uždaviniai prasideda, kai mes traukiame σ su kažkokia tikimybe, dažniausiai lygia $\nu_n(\{\sigma\}) := 1/p(n)$. Aptarkime dažnių

$$\nu_n(\bar{k}) := \nu_n(k_1(\sigma) = k_1, \ldots, k_n(\sigma) = k_n)$$

savybes.

Prisiminkime a.d., pasiskirsčiusių pagal neigiamą binominį dėsnį su parametrais (M, a), $M \in \mathbf{N}$, $0 < a < 1$, savybes. Jei γ toks dydis,, tai jo generuojanti funkcija lygi

$$\phi(z) := \sum_{k\geq 0} P(\gamma = k)z^k = \left(\frac{1-a}{1-za}\right)^M,$$

o jo faktorialiniai momentai lygūs

$$\mathbf{E}\gamma = \phi'(z)|_{z=1} = \frac{aM}{1-a}, \quad \mathbf{E}\gamma(\gamma-1) = \phi''(z)|_{z=1} = \frac{a^2M(M+1)}{(1-a)^2}, \ldots$$

$$\mathbf{E}\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-i+1) = \phi^{(i)}(z)|_{z=1} = \left(\frac{a}{1-a}\right)^i \frac{\Gamma(M+i)}{\Gamma(M)}, \ldots$$

Žia Γ – Eulerio gama funkcija.

2 teroema. *Tegu $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ – nepriklausomi a.d., pasiskirstę pagal neigiamą binominį dėsnį su parametrais $(\pi(j), x^j)$, $1 \leq j \leq n$, $x > 0$, t.y.,*

$$P(\gamma_j = k) = \binom{\pi(j)+k-1}{k}(1-x^j)^{\pi(j)}x^{jk}, \qquad k \geq 0,$$

$\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ *ir* $\Theta = 1\gamma_1 + \cdots + n\gamma_n$. *Tada*

$$\nu_n(\bar{k}) = P(\bar{\gamma} = \bar{k}\,|\Theta = n).$$

Įrodymas. Tegu

$$Z_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (1 - x^j)^{-\pi(j)}.$$

Skaičiuojame

$$P(\Theta = n) = \sum_{\bar{k},\,(1)} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi(j) + k_j - 1}{k_j} (1 - x^j)^{\pi(j)} x^{jk_j} = Z_n^{-1}(x) x^n \cdot p(n). \tag{2}$$

Dabar sąlyginė tikimybė (2 teoremos formulavime) lygi

$$P(\Theta = n)^{-1} \mathbf{1}(1k_1 + \cdots + nk_n = n) \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi(j) + k_j - 1}{k_j} (1 - x^j)^{\pi(j)} x^{jk_j} = \frac{N_n(\bar{k})}{p(n)}.$$

◇

Galėtume naudoti ir begalinį vektorių

$$\bar{\gamma} := \bar{\gamma}(x) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots\ ),$$

bet tada turėtume užtikrinti eilutės

$$1\gamma_1 + \cdots + n\gamma_n + \cdots$$

konvergavimą su tikimybe 1. Pagal Borelio-Kantelio lemą reiktų užtikrinti eilutės

$$\sum_{j \geq 1} P(\gamma_j \geq 1)$$

konvergavimą. Natūralų x parinkimą rodo ši teorema.

3 teorema. *Tarkime kartotinių atrankų klasė* $\mathcal{A} = \{\sigma\}$ *tenkina sąlygą*

$$\frac{p(n-1)}{p(n)} \to x \in (0, 1). \tag{3}$$

Jei $n \to \infty$, *tai*

$$\big(k_1(\sigma), \dots, k_n(\sigma), 0, \dots\big) \overset{\nu_n}{\Rightarrow} \bar{\gamma}(x)$$

baigtinamačių skirstinių prasme. Be to, pastarųjų visi fiksuotos eilės momentai konverguoja į ribinio proceso momentus.

Įrodymas. Neigiamą binominį dėsnį vienareikšmiškai apibrėžia jo momentų seka, todėl skirstinių konvergavimas išplauks iš visų eilių momentų konvergavimo. Ir vėl patogiau naudoti faktorialinius momentus. Paprastumo sumetimais nagrinėsime tik pirmąsias r koordinačių, kai r fiksuotas skaičius. Imkime bet kokį mišrųjį $i_1 + \cdots + i_r =: i$ eilės faktorialinį momentą

$$\mathbf{E}\gamma_{1(i_1)} \ldots \gamma_{r(i_r)} = \prod_{j=1}^{r} \mathbf{E}\gamma_{j(i_j)} = \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma(\pi(j)+i_j)}{\Gamma(\pi(j))} \frac{x^{ji_j}}{(1-x^j)^{i_j}} =: M(x), \quad 0 < x < 1.$$

Tiriamasis struktūros vektoriaus pirmųjų koordinačių tokios pat eilės faktorialinis momentas lygus

$$M_n := \mathbf{E}_n\big(k_{1(i_1)}(\sigma) \ldots k_{r(i_r)}(\sigma)\big) = \frac{1}{p(n)} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} k_{1(i_1)}(\sigma) \ldots k_{r(i_r)}(\sigma).$$

Žia $\mathcal{A}_n = \{\sigma \in \mathcal{A} : \ \sigma eile = n\}$.

Vėl pasinaudosime sąlyginėmis tikimybėmis. Kai a.d. X vidurkis egzistuoja ir Y – a.d., įgyjantis sveikas neneigiamas reikšmes, turime

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}(\mathbf{E}(x|\,Y)) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}(X|\,Y = n)P(Y = n).$$

Tikimybinėje erdvėje, kurioje apibrėžti a.d. γ_j, $j \leq n$, kai $0 < x < 1$ gauname

$$M(x) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}\big(\gamma_{1(i_1)} \ldots \gamma_{r(i_r)}|\ \Theta = n\big)P(\Theta = n) =: \sum_{n \geq 0} u_n x^n.$$

Pagal 2 teoremą sąlyginis vidurkis lygus M_n, todėl pasinaudoję (2) formule, gauname

$$M(x) = \frac{1}{Z_n(x)} \sum_{n \geq 0} M_n p(n) x^n \tag{3}$$

Padauginkime abi puses iš multiaibės generuojančios funkcijos

$$Z(x) = \sum_{n \geq 0} p(n)x^n = \prod_{j \geq 1} (1 - x^j)^{-\pi(j)}.$$

Matome, kad

$$Z(x)M(x) = \sum_{n \geq 0} M_n p(n) x^n \ \big(1 + x^{n+1} + \cdots\big),$$

o paskutinė begalinė eilutė neturi įtakos n Tayloro koeficiento skaičiavimui. Vadinasi, n-ieji koeficientai yra susiję lygybe

$$\sum_{i=0}^{n} p(n-i)u_i = p(n)M_n.$$

Reikia rasti ribą

$$M_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{p(n-i)}{p(n)} u_i, \tag{4}$$

kai $n \to \infty$. Iš (3) išplaukia

$$\frac{p(n-i)}{p(n)} \to x^i$$

kiekvienam fiksuotam i, be to,

$$\sup_{n \geq N} \frac{p(n-1)}{p(n)} =: c < 1,$$

kai N pakankamai didelis. Pažymėkime

$$K = \max\left\{ \sup_{n\geq 1} \frac{p(n-1)}{p(n)}, 1 \right\},$$

tada

$$\frac{p(n-i)}{p(n)} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{p(n-j-1)}{p(n-j)} \leq K^N c^{i-N}.$$

Vadinasi, eilutė

$$M_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{p(n-i)}{p(n)} u_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} u_i K^N c^{i-N} = \left(\frac{K}{c}\right)^N \sum_{i\geq 0} u_i c^i = \left(\frac{K}{c}\right)^N M(c) < \infty.$$

Gauname

$$M_n \to \sum_{i\geq 0} u_i x^i = M(x).$$

◇

Polinomų virš baigtinio kūno atveju $p(n-1)/p(n) = q^{-1}$, tad teorema galioja su $x = q^{-1}$. Kiti pavyzdžiai yra labiau komplikuoti. Įdomus pastebėjimas pasakomas šia teorema:

4 teorema. *Jei kartotinei atrankai yra patenkinta sąlyga*

$$\frac{1}{p(n)} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} k_1(\sigma) \to l_1 > 0,$$

tai

$$\frac{p(n-1)}{p(n)} \to \frac{l_1}{l_1 + \pi(1)}.$$

Be to, tada teisingas 3 teoremos tvirtinimas.

Įrodymas. Pasinaudokime (4) formule, kai $r=1$

$$M_n := \mathbf{E}_n k_1(\sigma) = \frac{1}{p(n)} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} k_1(\sigma) == \sum_{i=0}^{n} \frac{p(n-i)}{p(n)} u_i.$$

Dabar u_i apibrėžiami eilute

$$M(x) := \mathbf{E}\gamma_1 = \sum_{n\geq)} u_n x^n.$$

Bet momentą kairėje pusėje mes žinome. Tai

$$\frac{\Gamma(\pi(1)+1)}{\Gamma(\pi(1)} \frac{x}{1-x} = \frac{\pi(1)x}{1-x} = \pi(1)x(1+x+\cdots).$$

Taigi, $u_n \equiv \pi(1)$, kai $n\geq 1$, o $u_0 = 0$ ir todėl

$$M_n = \frac{\pi(1)}{p(n)} \sum_{i=1}^{n} p(n-i).$$

Nesunku patikrinti, kad galioja rekurentusis sąryšis

$$M_n = \frac{p(n-1)}{p(n)} \big(M - n - 1 + \pi(1)\big). \tag{5}$$

Jei patenkinta 4 teoremos sąlyga, pereiname prie ribos ir iš (5) išvedame norimą sąryšį

$$l_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{p(n-1)}{p(n)} (l_1 + \pi(1)).$$

Pirmasis teiginys rodytas. Kadangi surastoji riba yra intervale $(0,1)$, antrasis tvirtinimas išplaukia iš 3 teoremos. $\diamond$

Toliau vystydami panašią teoriją, kaip ir simetrinės grupės atveju, galėtume nagrinėti adityviąsias funkcijas, apibrėžtas multiaibių aibėje.

Literatūra

1. M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, Berlin, 2nd edition, 2001.

2. R. Arratia, A.D. Barbour and S. Tavaré, *Logarithmic combinatorial structures: a Probabilistic Approach*, EMS, 2003.

3. P.J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge Univ. Press, 1994.

4. N.L. Johnson & S. Kotz, *Urn Models and Their Applications*, John Wiley, New York, 1977.

5. V.F. Kolčin, *Atsitiktiniai atvaizdžiai*, Nauka, Maskva, 1984 (rusų k.).

6. V.N. Sačkov, *Įvadas į kombinatorinius diskrečios matematikos metodus*, Nauka, Maskva, 1982 (rusų k.).

6. V.N. Sachkov, *Probabilistic Methods in Discreete Mathematics*, Cambridge University Press, 1995.

7. V.N. Sachkov, *Probabilistic Methods in the Combinatorial Analysis*, Cambridge University Press, 1997.

8. H.S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, San Diego, 2nd edition, 1994.

9. A.M. Odlyzko, Asymptotic enumeration methods, In: *Handbook of Combinatorics* (R.L.Graham *et al* Eds), vol II, Elsevier, Amsterdam, 1995, 1063–1229.

10. J.S. Vitter, Ph. Flajolet, Average-case analysis of algorithms and data structures, In: *Handbook of Theoretical Computer Science* (J. van Leeuwen, Ed),Elsevier, Amsterdam, 1990, 433–524.